Fiche G2.1 : Définitions du produit scalaire

1 – Définition avec le cosinus

Notations : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

• On appelle **norme** de $\vec{u}$, et on note $||\vec{u}||$, la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$ (*Fig 1*) .

• On note $(\vec{u};\vec{v})$ l'angle formé par les veceurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*Fig 2*) :

Soient A, B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $(\vec{u};\vec{v}) = \widehat{BAC}$.

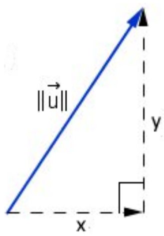


Figure 1

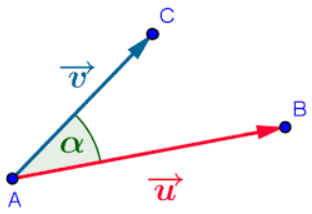


Figure 2

Définition 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On note α l'angle $(\vec{u};\vec{v})$. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u}.\vec{v}$, est le nombre réel défini par :

• Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

• Si les deux vecteurs sont non nuls, $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha)$.

Remarques :

• Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors on obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

• L'opération $\vec{u}.\vec{v}$ est appelée « produit scalaire » car on multiplie deux vecteurs pour obtenir un **nombre**.

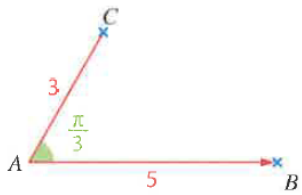
• En physique, le **travail** W d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne $\overrightarrow{AB}$ est le produit scalaire $\vec{F}.\overrightarrow{AB}$

Il s'agit de l'energie (exprimé en Joules) fournie par la force $\vec{F}$ au cours du déplacement $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 1 : On considère A, B et C trois points distincts tel que :

$AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}(60°)$. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 15 \times \frac{1}{2} = 7.5$



Cas particuliers :

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires :

. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens alors $\alpha = (\vec{u};\vec{v}) = 0$ et donc $\cos(\alpha) = 1$.

On obtient donc $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

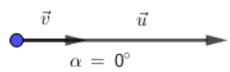


Figure 3

. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont un sens contraire alors $\alpha = (\vec{u};\vec{v}) = \pi$ (180°) et donc $\cos(\alpha) = -1$.

On obtient donc $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

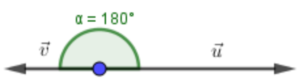


Figure 4

• Le produit scalaire de $\vec{u}$ avec lui-même est appelée **carré scalaire** de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$

$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| = ||\vec{u}||^2$.

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si $\vec{u}.\vec{v} = 0$. C'est le cas lorsque :

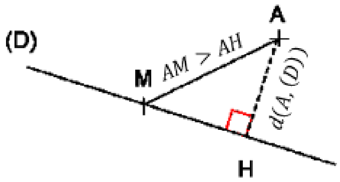
Figure 5

. L'un des deux vecteurs est nul. Le vecteur nul $\vec{0}$ est donc orthogonal à tout vecteur.

. $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc si $\alpha = (\vec{u};\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}$ (90°) c'est-à-dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions **perpendiculaires**.

2 – Définition avec le projeté orthogonal

Rappel : Soit un point A et une droite (D).

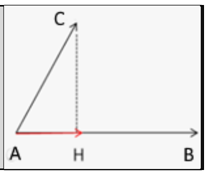


- On appelle **projeté orthogonal** de A sur (D), le point H tel que $(AH) \perp (D)$.
- C'est le point M de la droite (D) le **plus proche** de A.
- La distance AH est alors appelée **distance du point A à la droite (D)**.

  Elle est notée $d(A,(D))$

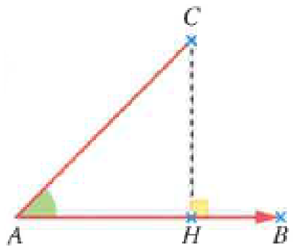
Définition 2 : Soit A, B et C trois points du plan et H le **projeté orthogonal** de C sur (AB).

On a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont dans le } \textbf{même sens}. \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont dans le } \textbf{sens contraire}. \end{cases}$



Remarque : On doit vérifier que les deux définitions du produit scalaire données sont **équivalentes.**

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le **même sens.**



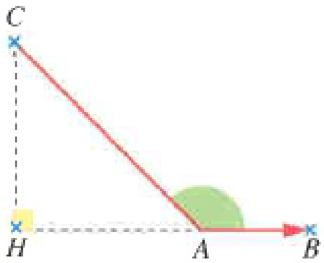
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Or le triangle AHC est rectangle en H donc on a :

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AH}{AC}$.

On obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \frac{AH}{AC} = AB \times AH$.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le **sens contraire.**



$\widehat{BAC} = \pi - \widehat{CAH}$ donc $\cos(\widehat{BAC}) = -\cos(\widehat{CAH})$

On a donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \cos(\widehat{CAH})$.

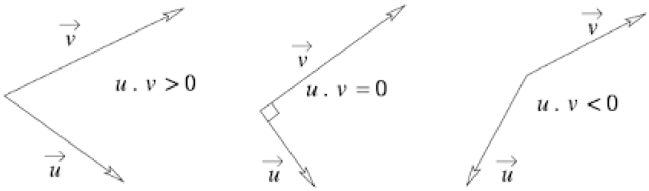
Or le triangle AHC est rectangle en H donc on a :

$\cos(\widehat{CAH}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AH}{AC}$.

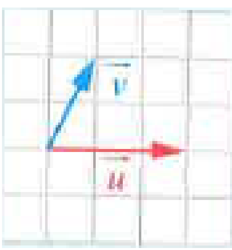
On obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \frac{AH}{AC} = -AB \times AH$.

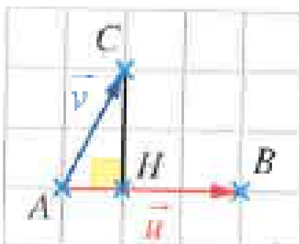
Remarques :

- Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on obtient dans les deux cas, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
- Le signe du produit scalaire donne la nature l'angle : aigu, obtu ou droit.



Exemple 2 : Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.





Soient A, B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens.

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH = 3 \times 1 = 3$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$ donc l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.