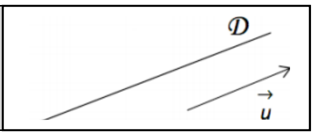
Fiche G2.1 : Equation cartésienne

1 – Vecteur directeur d'une droite

Définition 1 : Soit (D) une droite du plan. On appelle **vecteur directeur** de (D), tout vecteur $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D)



Remarques :

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs : Tous ces vecteurs sont **colinéaires** (voir Figure 1)
- Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}$. (voir Figure 2).
- Une droite peut être définie à partir d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$:

  C'est l'ensemble des points M tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (voir Figure 3).

Figure 1

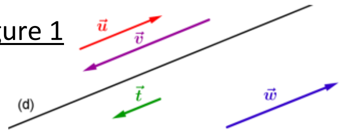


Figure 2

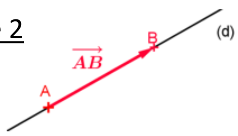
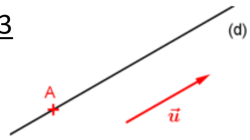
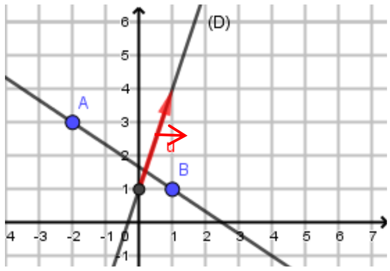


Figure 3



Exemple 1 :



1) Déterminer graphiquement un vecteur directeur de la droite (d).

   Le vecteur $\vec{u}\binom{1}{3}$ est un vecteur directeur de (d)

2) On considère les points $A(-2; 3)$ et $B(1; -3)$.

   Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB)

   Le vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \binom{1-(-2)}{3-(-3)}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

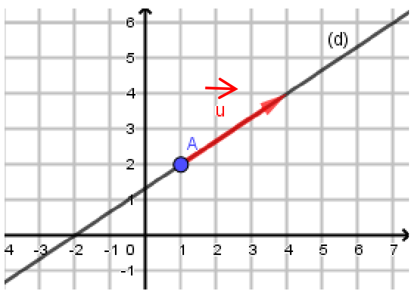
2 – Equation cartésienne d'une droite

Propriété 1 : L'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

Remarques :

- On dit que $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** de (D).
- Un point M appartient à une droite (D) si et seulement si lorsque l'on remplace les variables 'x' et 'y' de l'équation de (D) par les coordonnées x_M et y_M de M, l'égalité est vérifiée.

Exemple 2 : On considère la droite (d) d'équation cartésienne $(d)\colon 2x - 3y + 4 = 0$



1) Vérifier que le point $A(1; 2)$ appartient à la droite (d)

   $2x_A - 3y_A + 4 = 2 \times \mathbf{1} - 3 \times \mathbf{2} + 4 = 2 - 6 + 4 = 0$ donc $A \in (d)$.

2) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d).

   $a = 2$ et $b = -3$ donc $\vec{u}\binom{-b}{a} = \binom{3}{2}$ est un vecteur directeur de (d).

3) Tracer la droite (d) dans le repère ci-contre.

Propriété 2 : Réciproquement, toute droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ possède une équation cartésienne sous la forme $(D): ax + by + c = 0$

Remarque : L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique : En multipliant l'égalité par un nombre réel k non nul, on obtient une autre équation cartésienne : $\boldsymbol{k}ax + \boldsymbol{k}by + \boldsymbol{k}c = 0$.

Démonstration : On considère (D) une droite du plan.

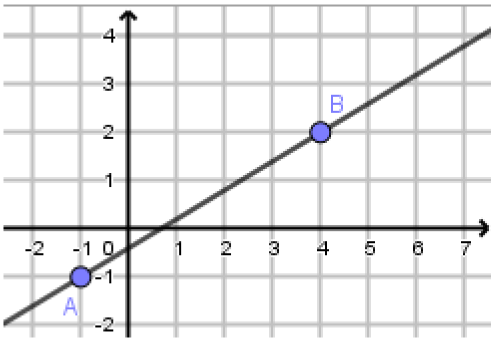
- Soient $A(x_A; y_A)$ un point de (D) et $\vec{u}\binom{-b}{a}$ un vecteur directeur de (D).
- On doit vérifier que le point $M(x; y)$ appartient à la droite (D) si et seulement si $ax + by + c = 0$
- Or $M(x; y)$ appartient à la droite $D \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = 0$
- Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A}$ et $\vec{u}$ a pour coodonées $\vec{u}\binom{-b}{a}$
- Calculons $\det(\vec{u}\,; \overrightarrow{AM}) = (x - x_A) \times a - (y - y_A) \times (-b)$

$$= ax - ax_A + by - by_A$$

$$= ax + by \underbrace{-ax_A - by_A}_{+c}$$

- Finalement $M(x; y) \in D \Leftrightarrow\ ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$. □

Exemple 3 : On considère les points $A(-1; -1)$ et $B(4; 2)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).



- Le vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \binom{4-(-1)}{2-(-1)} = \binom{5}{3} = \binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
- $a = 3$ et $b = -5$: Donc l'équation cartésienne est sous la forme $(AB): 3x - 5y + c = 0$.
- Le point $A(-1; -1)$ appartient à (AB) donc :

$3 \times (-1) - 5 \times (-1) + c = 0$ d'où $-3 + 5 + c = 0$ d'où $c = -2$

- Finalement, une équation cartésienne de la droite (AB) est

$$(AB): 3x - 5y - 2 = 0$$