Fiche G2.2 : Equation réduite

1 – Equation réduite d'une droite

Théorème 1 : Toute droite (d) du plan est sous l'une des 3 formes suivantes :

Forme	Ensemble de points	Equation réduite	Exemples
Verticale	Ensemble des points $M(x;y)$ de même abscisse k où c est un nombre réel	$(d): x = k$	$(d): x = 2$
Horizontale	Ensemble des points $M(x;y)$ de même ordonnée k où c est un nombre réel	$(d): y = k$	$(d): y = 3$
Oblique	Ensemble des points $M(x;y)$ tel que $y = mx + p$ où m et p sont des nombres réels tel que $m \neq 0$	$(d): y = mx + p$	$(d): y = x$ $(d): y = 2x + 1$

Démonstration : Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

• Si (d) est verticale, alors $\vec{u}\binom{0}{1}$ est un vecteur directeur de (d) qui a donc une équation cartésienne sous la forme $x + c = 0$ c'est-à-dire $x = -c$

• Si (d) est horizontale, alors $\vec{u}\binom{1}{0}$ est un vecteur directeur de (d) qui donc une équation cartésienne sous la forme $-y + c = 0$ c'est-à-dire $-y = -c$ d'où $y = c$

• Si (d) est oblique alors $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de (d) avec $a \text{ et } b \neq 0$. L'équation cartésienne est sous la forme $ax + by + c = 0$ c'est-à-dire $by = -ax + c$ c'est-à-dire $y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x + \underbrace{\frac{c}{b}}_{p}$

Exemple 1 :

1) Tracer la droite $(d_1): x = 1$

   C'est la droite verticale passant par 1

2) Tracer la droite $(d_2): y = -2$

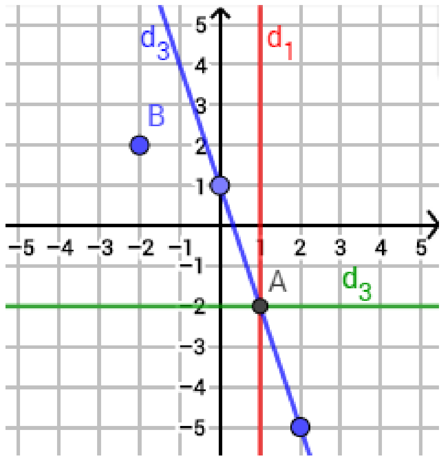
   C'est la droite horizontale passant par -2

3) Tracer la droite $(d_3): y = -3x + 1$

   On calcule les coordonnées de deux points de la droite :

   . *Si* $x = 0$ *alors* $y = -3 \times 0 + 1 = 1$ donc $(0;1) \in (d_3)$

   . *Si* $x = 2$ *alors* $y = -3 \times 2 + 1 = 5$ donc $(2;5) \in (d_3)$



4) Le point $A(1\,;-2)$ appartient-il à $(d_1): x = 1$? *Oui :* $x_A = 1$ *donc* $A \in (d_1)$.

5) Le point $B(-2\,;2)$ appartient-il à $(d_2): y = -2$? *Non :* $y_B = 2 \neq -2$ *donc* $B \notin (d_2)$.

6) Les points A et B appartiennent-ils à $(d_3): y = -3x + 1$?

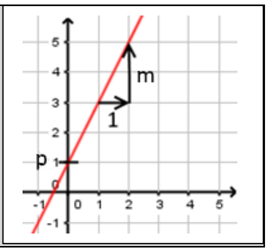
   . $-3x_A + 1 = -3 \times 1 + 1 = -2 = y_A$ donc $A \in (d_3)$.

   . $-3x_B + 1 = (-3) \times (-2) + 1 = 7 \neq y_B$ donc $B \notin (d_3)$.

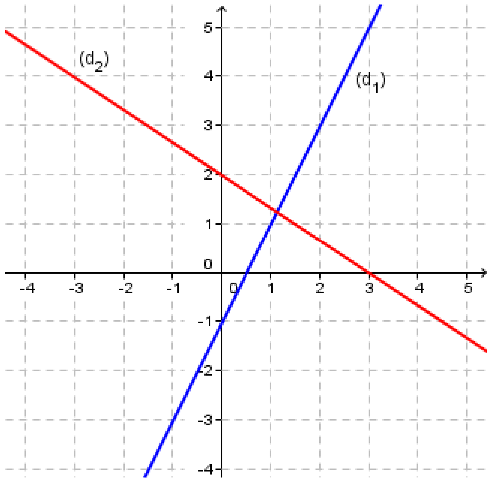
2 – Coefficient directeur & Ordonnée à l'origine

Définition 1 : Soit (d) une droite d'équation $y = mx + p$

- m est appelée le **coefficient directeur**. C'est la **pente** de la droite (d).
- p est appelée l'**ordonnée à l'origine**. C'est la valeur en laquelle la droite coupe l'axe des ordonnées.



Exemple 2 : Déterminer graphiquement l'équation des droites (d_1) et (d_2).



1) Droite (d_1) :
   - $m = 2$
   - $p = -1$
   - Equation : $y = 2x - 1$
2) Droite (d_2) :
   - $m = -\frac{2}{3}$
   - $p = 2$
   - Equation : $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Théorème 2 : Soit (d) une droite d'équation $y = mx + p$.

Quelque soit les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de la droite (d), on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\textit{Déplacement vertical entre A et B}}{\textit{Déplacement horizontal entre A et B}} \text{ ou encore } pente = \frac{"\uparrow"}{"\rightarrow"}$$

Exemple 3 : Dans chacun des cas, déterminer l'équation de la droite (AB).

1) $A(2\,;5)$ et $B(2-6)$

   $x_A = x_B = 2$ *donc* (AB) *est la droite verticale d'équation* $x = 2$

2) $A(-1\,;-3)$ et $B(0;-3)$

   $y_A = y_B = -3$ *donc* (AB) *est la droite horizontale d'équation* $y = -3$

3) $A(3\,;4)$ et $B(1;-2)$

   . $x_A \neq x_B$ *et* $y_A \neq y_B$ *donc* (AB) *est une droite oblique d'équation* $y = mx + p$

   . Calculons m *:* $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{1-3} = \frac{-6}{-2} = \frac{6}{2} = 3$

   . Déterminons p *: On sait que l'équation de* (AB) *est sous la forme* $y = 3x + p$

   Or $A(3\,;4) \in (AB)$ *donc* $y_A = 3x_A + b$

   $4 = 3 \times 3 + b$

   $4 = 9 + b$

   $b = 4 - 9 = -5.$

   . Finalement, on trouve (AB): $y = 3x - 5$