

Fiche G2.2 : Propriétés du produit scalaire

1 – Produit scalaire et coordonnées

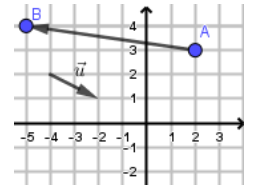
Propriété 1 : Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Remarque : En particulier, on retrouve la formule pour la norme $\|\vec{u}\|$ d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = xx + yy = x^2 + y^2 \text{ donc on a bien } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple 1 : Soient le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et les points $A(2; 3)$ et $B(-5; 4)$. Calculer $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}$:

- On calcule les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} y_B - y_A \\ x_B - x_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ -5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$
- On calcule le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-7) = 2 + 7 = 9$



2 – Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Propriété 2 : Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs et k un nombre réel. On a les propriétés suivantes :

$$(1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad (2) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad (3) \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Remarque : L'opération 'produit scalaire' fonctionne donc comme la **multiplication** des nombres.

Exemple 2 : Utiliser les règles de calculs de la propriété, pour simplifier les expressions suivantes :

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ (Distributivité à droite)
- $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -\vec{v}^2 = -\|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} + (-\vec{w})) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (-\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (2\vec{u} + 5\vec{v}) = \vec{u} \cdot 2\vec{u} + \vec{u} \cdot 5\vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 5\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 + 5\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{t}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{t} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{t} + \vec{v} \cdot \vec{t}$ (Double distributivité)

3 – Produit scalaire et normes

• Les règles de calculs précédentes conduisent aux identités remarquables suivantes :

$$\cdot \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

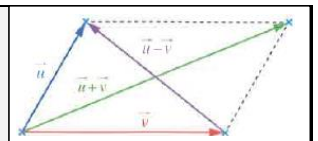
$$\cdot \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\cdot (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

• On en déduit ainsi d'autres expressions du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction des normes :

Propriété 3 : Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On a les formules suivantes :

$$\cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \qquad \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$



Exemple 3 : Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2)$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ (Relation de Chasles)
- Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(4^2 + 6^2 - 7^2) = \frac{3}{2}$

