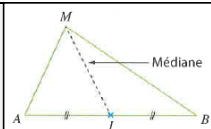


## Fiche G2.3 : Applications du produit scalaire

### 1 – Théorème de la médiane

Théorème 1 :



Démonstration : Soient deux points  $A$  et  $B$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Calculons le produit scalaire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$$

On décompose à l'aide de la relation de Chasles.

$$=$$

On développe à l'aide de la double distributivité.

$$=$$

On factorise par  $\overrightarrow{MI}$ .

$$=$$

car  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$  puisque  $I$  milieu de  $[AB]$

$$=$$

car  $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$=$$

car  $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$  □

Exemple 1 : Quelle est la longueur d'une médiane dans un triangle équilatéral de côté 1 ?

• Soit  $AMB$  un triangle équilatéral de côté 1. On a donc  $\widehat{M} =$  \_\_\_\_\_

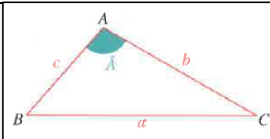
• On a  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$  \_\_\_\_\_

• Le théorème de la médiane nous permet d'écrire que : \_\_\_\_\_

• On obtient donc  $MI^2 =$  \_\_\_\_\_ d'où  $MI =$  \_\_\_\_\_

### 2 – Formule d'Al-Kashi

Théorème 2 :



Démonstration : Soit  $ABC$  un triangle.

• Exprimons  $\overrightarrow{BC}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  (Relation de Chasles) : \_\_\_\_\_

• A l'aide de l'identité remarquable on développe  $\overrightarrow{BC}^2$  : \_\_\_\_\_

• Or la définition du produit scalaire avec le cosinus permet d'écrire :  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$  \_\_\_\_\_

• On obtient \_\_\_\_\_ □

Remarques :

• On a aussi  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\widehat{B})$  et  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$ .

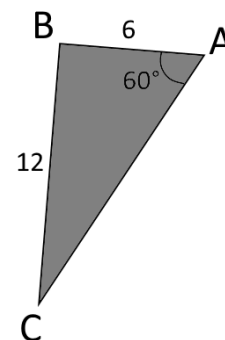
• Ce théorème généralise le théorème de Pythagore : Si  $ABC$  est rectangle en  $A$  on a  $\widehat{A} =$  \_\_\_ et  $\cos(\widehat{A}) =$  \_\_\_

On obtient donc \_\_\_\_\_ c'est-à-dire \_\_\_\_\_ .



Exemple 2 : On considère un triangle  $ABC$  tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 12$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .

1) Calculer la longueur  $BC$ .

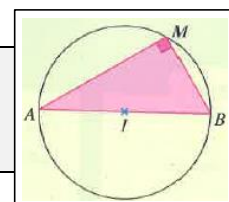


2) Déterminer la mesure de l'angle  $\widehat{BCA}$ .

3) Que peut-on en déduire sur le triangle  $ABC$  ?

### 3 – Caractérisation du cercle

Théorème 3 :



Démonstration : Soient deux points  $A$  et  $B$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Soit  $M$  un point du plan.

- D'après le théorème de la médiane on a : \_\_\_\_\_ .
- Ainsi,  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_ (car  $AB$  et  $MI > 0$ ).
- Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[AB]$ .  $\mathcal{C}$  est donc de centre  $I$ .
- On a donc  $MI = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_  $\Leftrightarrow$  \_\_\_\_\_
- Conclusion  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  ce qui démontre le théorème.  $\square$

Remarque : Voici une reformulation plus connue de ce théorème :

Le triangle  $AMB$  est rectangle en  $M$  ( $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ) si et seulement si le point  $M$  appartient au **cercle circonscrit** à ce triangle (le cercle de diamètre  $[AB]$ )

Exemple 3 : Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 4$ ,  $AC = 3$  et  $BC = 5$ .

Montrer que  $A$  appartient au cercle de diamètre  $[BC]$ .