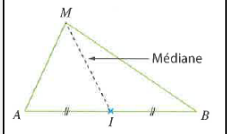


Fiche G2.3 : Applications du produit scalaire

1 – Théorème de la médiane

Théorème 1 : Soient deux points A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$



Démonstration : Soient deux points A et B et I le milieu de $[AB]$. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

On décompose à l'aide de la relation de Chasles.

$$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

On développe à l'aide de la double distributivité.

$$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

On factorise par \overrightarrow{MI} .

$$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ puisque I milieu de $[AB]$

$$= \overrightarrow{MI}^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

car $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{MI}^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

car $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$ □

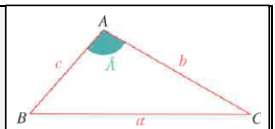
Exemple 1 : Quelle est la longueur d'une médiane dans un triangle équilatéral de côté 1 ?

- Soit AMB un triangle équilatéral de côté 1. On a donc $\widehat{M} = \frac{\pi}{3}$ (60°)
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \times MB \times \cos(\widehat{AMB}) = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Le théorème de la médiane nous permet d'écrire que : $MI^2 - \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{2}$.
- On obtient donc $MI^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ d'où $MI = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 – Formule d'Al-Kashi

Théorème 2 : Dans un triangle ABC , on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

On a alors : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$



Démonstration : Soit ABC un triangle.

- Exprimons \overrightarrow{BC} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} (Relation de Chasles) : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
- A l'aide de l'identité remarquable on développe \overrightarrow{BC}^2 : $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$.
- Or la définition du produit scalaire avec le cosinus permet d'écrire : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos(\widehat{CAB})$
- On obtient $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\widehat{CAB}) + AB^2$ i.e. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$ □

Remarques :

- On a aussi $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\widehat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$.
- Ce théorème généralise le théorème de Pythagore : Si ABC est rectangle en A on a $\widehat{A} = 90^\circ$ et $\cos(\widehat{A}) = 0$
On obtient donc $a^2 = b^2 + c^2$ c'est-à-dire $BC^2 = AC^2 + AB^2$



Exemple 2 : On considère un triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 12$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

1) Calculer la longueur BC .

On applique Al-Kashi avec $a = BC$; $b = 12$; $c = 6$ et $\hat{A} = 60^\circ$ donc $\cos(\hat{A}) = \frac{1}{2}$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) = 12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6 \times 0.5 = 108.$$

$$\text{Ainsi, } BC^2 = 108 \text{ d'où } BC = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3} \approx 10.4$$

2) Déterminer la mesure de l'angle \widehat{BCA} .

On applique la formule d'Al-Kashi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$ pour trouver d'abord $\cos(\hat{C})$.

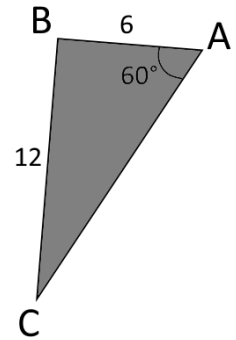
$$36 = 108 + 144 - 2 \times 6\sqrt{3} \times 12 \times \cos(\hat{C}) \text{ d'où } -216 = -144\sqrt{3} \times \cos(\hat{C}).$$

$$\text{On obtient } \cos(\hat{C}) = \frac{-216}{-144\sqrt{3}} = \frac{72 \times 3}{72 \times 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et donc } \hat{C} = 30^\circ$$

3) Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ?

La somme des angles d'un triangle étant égal à 180° on a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ d'où $60^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ$

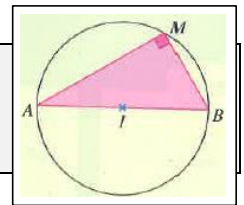
Ainsi $\hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ et on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B .



3 – Caractérisation du cercle

Théorème 3 : On considère deux points A, B du plan.

L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



Démonstration : Soient deux points A et B et I le milieu de $[AB]$. Soit M un point du plan.

- D'après le théorème de la médiane on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
- Ainsi, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$ (car AB et $MI > 0$).
- Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$. \mathcal{C} est donc de centre I .
- On a donc $MI = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow MI$ est un rayon de $\mathcal{C} \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$
- Conclusion $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ce qui démontre le théorème. \square

Remarque : Voici une reformulation plus connue de ce théorème :

Le triangle AMB est rectangle en M ($\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$) si et seulement si le point M appartient au **cercle circonscrit** à ce triangle (le cercle de diamètre $[AB]$)

Exemple 3 : Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 5$.

Montrer que A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

- $(3; 4; 5)$ est un triplet Pythagorien : On a $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.
- On a donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ et d'après la réciproque de Pythagore ABC est rectangle en A .
- Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et donc d'après le théorème précédent A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

