Fiche G3.1 : Droites parallèles & Droites sécantes

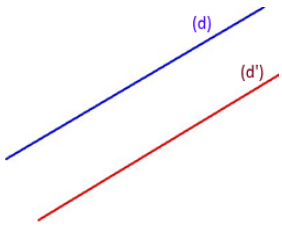
1 – Droites parallèles

Définition 1 : Deux droites (d) et (d') sont dites **parallèles** si elles ont la même direction.

Remarques :

- Lorsque (d) et (d') sont parallèles, on note $(d)//(d')$
- Deux droites (d) et (d') sont parallèles si et seulement si elles ne se coupent jamais.

  Leur intersection est vide : $(d) \cap (d') = \emptyset$



Propriété 1 : Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemple 1 : On considère les points $A(-5; 2)$ et $B(5; 6)$ ainsi que la droite (d) d'équation cartésienne $(d): 2x - 5y + 3 = 0$. Les droites (d) et (AB) sont-ils parallèles ?

- Dans l'équation cartésienne de (d) on a $a = 2$ et $b = -5$

  Donc un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\binom{-b}{a} = \vec{u}\binom{5}{2}$

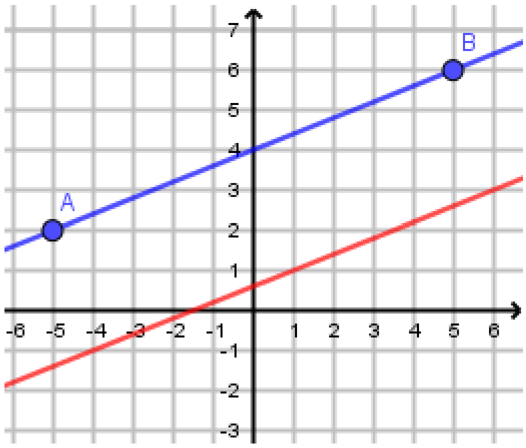
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) :

  $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{5-(-5)}{6-2} = \binom{10}{4}$

- $\det(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = 5 \times 4 - 2 \times 10 = 20 - 20 = 0$

  Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

- On en conclut que (d) et (AB) sont parallèles.



Propriété 2 : Deux droites obliques sont parallèles si et seulement si ils ont le même coefficient directeur.

Exemple 2 : On considère la droite (d) d'équation cartésienne $(d): -5x + 7y - 14 = 0$ ainsi que la droite $(d)'$ d'équation réduite $(d)': y = \frac{3}{4}x$. Les droites (d) et (d') sont-ils parallèles ?

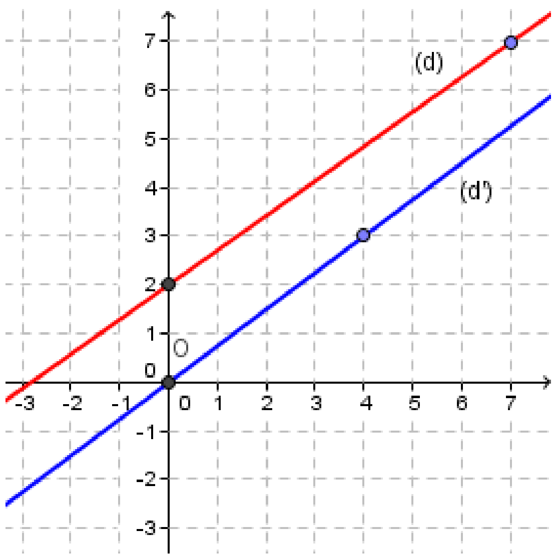
- On calcule l'équation réduite de (d) :

  $-5x + 7y - 14 = 0 \Leftrightarrow 7y = 5x + 14 \overset{\div 7}{\Leftrightarrow} y = \frac{5}{7}x + 2$

  (d) a pour pente $m = \frac{5}{7} \approx 0.71$

- (d') a pour pente $m' = \frac{3}{4} = 0.75$.

- Donc $m \neq m'$ et donc (d) *et* (d') ne sont pas parallèles.



2 – Droites sécantes

• Si les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles alors elle se coupe : On dit qu'elles sont **sécantes**. Leur intersection est un point M : $(d) \cap (d') = \{M\}$.

• A partir des équations de droites, il est possible de trouver les coordonnées de ce point d'intersection.

Propriété 1 : Si (d) et (d') sont sécantes, alors leur point d'intersection a pour coordonnées l'unique solution du système formé par leurs équations de droites.

Démonstration : Soit (d) et (d') deux droites sécantes.

• Soit $M(x_M; y_M)$ le point d'intersection de (d) et (d'). On a alors $M \in (d)$ et $M \in (d')$

• Ainsi, les coordonnées du points M vérifient à la fois l'équation de (d) ainsi que celle de (d').

• Cela signifie que $(x_M; y_M)$ est solution du système formé par les équations de droites de (d) et (d'). □

Exemple 3 : Déterminer les coordonnées du point $M(x; y)$ d'intersection entre les droites de l'exemple 2 (d): $-5x + 7y - 14 = 0$ et $(d)'$: $y = \frac{3}{4}x$.

• On résoud le système formé par les équations des droites (d) et (d').

$$\begin{cases} -5x + 7y - 14 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 7 \times \frac{3}{4}x - 14 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{20}{4}x + \frac{21}{4}x - 14 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x = 14 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \times 14 = 56 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 56 \\ y = \frac{3}{4} \times 56 = 42 \end{cases}$$

• Le point d'intersection entre les droites (d) et (d') a pour coordonnées $M(56; 42)$