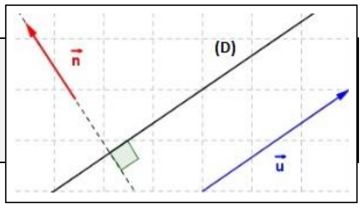
Fiche ___ : Vecteur normal à une droite

1 – Définition d'un vecteur normal

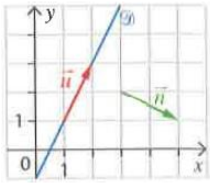
Définition 1 :



Remarques :

- Un vecteur normal à (D) est dans la direction perpendiculaire à celle-ci.
- Tout vecteur **colinéaire** à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (D).
- Tout vecteur **colinéaire** à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à (D).

Exemple 1 :



- $\vec{u}\binom{1}{2}$ est un vecteur directeur à (D). Il donne la direction de (D).
- $\vec{n}\binom{2}{-1}$ est un vecteur normal à (D) : On a $\vec{u}.\vec{n} =$ ____________________.

Remarque : Si $\vec{u}\binom{a}{b}$ est un vecteur directeur d'une droite (D) alors $\vec{n}\binom{-b}{a}$ est un vecteur normal à (D).

En effet, $\vec{u}.\vec{n} =$ ____.

2 – Vecteur normal et équation cartésienne

Rappel : Soient a, b et c trois nombres réels.

- L'ensemble des points $M(x; y)$ tel que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

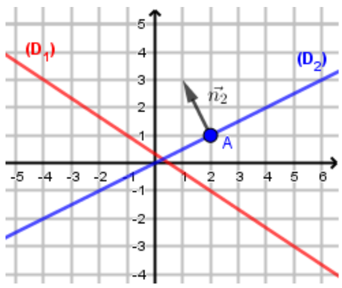
  On dit que cette droite a pour **équation cartésienne** $ax + by + c = 0$.
- Réciproquement, toute droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ a une équation sous la forme $ax + by + c = 0$.

Théorème 1 :

Exemple 2 :

1) Soit (D_1) la droite d'équation $(D1): 2x + 3y - 1 = 0$.

   Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal à (D_1)



2) Soit (D_2) la droite passant par le point $A(2; 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\binom{-1}{2}$.

   Déterminer une équation cartésienne de (D_2).

<u>Démonstration</u> : On considère une droite (D) et $\vec{n}\binom{a}{b}$ un vecteur.

« ⇒ » : Supposons que (D) a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$.

• Le vecteur $\vec{u}\binom{\_\_}{\_\_}$ est donc un vecteur directeur de (D).

• Ainsi, $\vec{n}.\vec{u}=$ ______________________________ ce qui prouve que $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à (D).

« ⇐ » : Supposons maintenant que (D) a pour vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ et soit $A(x_A;y_A)$ un point de (D).

• $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ est un vecteur ____________ de $(D)\Leftrightarrow\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont ____________ $\Leftrightarrow$ __________.

• Or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées ____________________________________ et on a $\vec{n}\binom{\_}{\_}$.

• On a donc $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow$ ____________________________________

$\Leftrightarrow$ ____________________________________

$\Leftrightarrow$ ____________________________________

• Ainsi on a montrer que (D) a une équation sous la forme $ax+by+c=0$ avec $c=$ ____________. □

<u>Théorème 2</u> : Soient deux droites (d) et (d') d'équation cartésienne respectives $(d): ax+by+c=0$ et $(d'): a'x+b'y+c'=0$. Alors :

•

•

<u>Démonstration</u> : (d) a pour vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ et (d') a pour vecteur normal $\vec{n'}\binom{a'}{b'}$.

• $(d)\parallel(d')\Leftrightarrow\vec{n}\ et\ \vec{n'}\ sont$ ________________ $\Leftrightarrow$ ________________ $\Leftrightarrow$ ________________.

• $(d)\perp(d')\Leftrightarrow\vec{n}\ et\ \vec{n'}\ sont$ ________________ $\Leftrightarrow$ ________________ $\Leftrightarrow$ ________________. □

<u>Exemple 3</u> : Parmi les trois droites suivantes identifier les couples de droites parallèles et perpendiculaires :

$$(D_1): -2x+9y=28\ ;\ (D_2): 4x-18y=-12 \text{ et } (D_3): 9x+2y=9$$