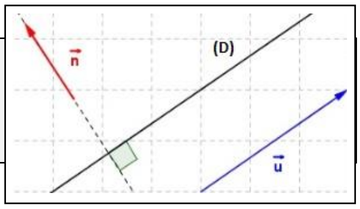
# Fiche G3.1 : Vecteur normal à une droite

## 1 – Définition d'un vecteur normal

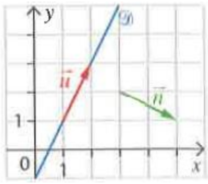



Définition 1 : On considère une droite $(D)$ de **vecteur directeur** $\vec{u}$. On appelle **vecteur normal** à $(D)$, un vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$, i.e tel que $\vec{u}.\vec{n} = 0$

Remarques :

- Un vecteur normal à $(D)$ est dans la direction perpendiculaire à celle-ci.
- Tout vecteur **colinéaire** à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $(D)$.
- Tout vecteur **colinéaire** à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à $(D)$.

Exemple 1 :




- $\vec{u}\binom{1}{2}$ est un vecteur directeur à $(D)$. Il donne la direction de $(D)$.
- $\vec{n}\binom{2}{-1}$ est un vecteur normal à $(D)$ : On a $\vec{u}.\vec{n} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0$.

Remarque : Si $\vec{u}\binom{a}{b}$ est un vecteur directeur d'une droite $(D)$ alors $\vec{n}\binom{-b}{a}$ est un vecteur normal à $(D)$.

En effet, $\vec{u}.\vec{n} = a \times (-b) + b \times a = -ab + ab = 0$

## 2 – Vecteur normal et équation cartésienne

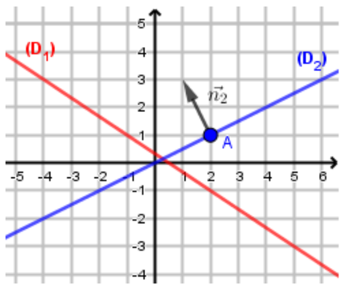
Rappel : Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels.

- L'ensemble des points $M(x; y)$ tel que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

  On dit que cette droite a pour **équation cartésienne** $ax + by + c = 0$.
- Réciproquement, toute droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ a une équation sous la forme $ax + by + c = 0$.

Théorème 1 : Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels tel que $(a; b) \neq (0; 0)$. Une droite $(D)$ a une équation cartésienne sous la forme $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à $(D)$.

Exemple 2 :




1) Soit $(D_1)$ la droite d'équation $(D1): 2x + 3y - 1 = 0$.

   Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal à $(D_1)$

   $a = 2$ et $b = 3$ donc $\vec{n}\binom{2}{3}$ est un vecteur normal à $(D_1)$

2) Soit $(D_2)$ la droite passant par le point $A(2; 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\binom{-1}{2}$.

   Déterminer une équation cartésienne de $(D_2)$.

   - $M(x; y) \in (D_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{n_2}\ sont\ orthogonaux \Leftrightarrow \overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{AM} = 0$
   - $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AM}\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} = \binom{x-2}{y-1}$ et on a $\overrightarrow{n_2}\binom{-1}{2}$.
   - $M(x; y) \in (D_2) \Leftrightarrow (-1) \times (x - 2) + 2 \times (y - 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 2 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y = 0$
   - L'équation cartésienne de $(D_2)$ est $(D_2) : -x + 2y = 0$.

Démonstration : On considère une droite $(D)$ et $\vec{n}\binom{a}{b}$ un vecteur.

« $\Rightarrow$ » : Supposons que $(D)$ a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$.

• Le vecteur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est donc un vecteur directeur de $(D)$.

• Ainsi, $\vec{n}.\vec{u}=a\times(-b)+b\times a=-ab+ba=0$ ce qui prouve que $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à $(D)$.

« $\Leftarrow$ » : Supposons maintentant que $(D)$ a pour vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ et soit $A(x_A;y_A)$ un point de $(D)$.

• $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $(D)\Leftrightarrow\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

• Or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AM}\binom{x_M-x_A}{y_M-y_A}=\binom{x-x_A}{y-y_A}$ et on a $\vec{n}\binom{a}{b}$.

• On a donc $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

$$\Leftrightarrow ax-ax_A+by-by_A=0$$

$$\Leftrightarrow ax+by\underbrace{-ax_A-by_A}_{+c}=0$$

• Ainsi on a montrer que $(D)$ a une équation sous la forme $ax+by+c=0$ avec $c=-ax_A-by_A$. □

Théorème 2 : Soient deux droites $(d)$ et $(d')$ d'équation cartésienne respectives $(d)$: $ax+by+c=0$ et $(d')$: $a'x+b'y+c'=0$. Alors :

• $(d)\parallel(d')$ si et seulement si $ab'-a'b=0$.

• $(d)\perp(d')$ si et seulement si $aa'+bb'=0$.

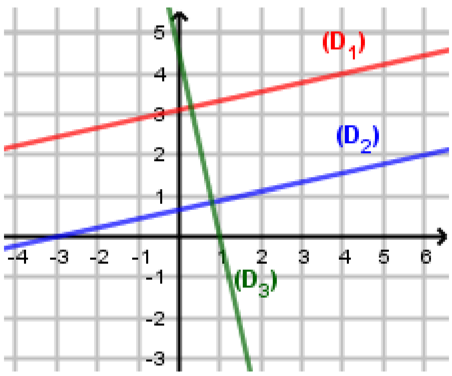
Démonstration : $(d)$ a pour vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ et $(d')$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}\binom{a'}{b'}$.

• $(d)\parallel(d')\Leftrightarrow\vec{n}\ et\ \overrightarrow{n'}\ sont\ colinéaires\Leftrightarrow\det(\vec{n},\overrightarrow{n'})=0\Leftrightarrow ab'-a'b=0$.

• $(d)\perp(d')\Leftrightarrow\vec{n}\ et\ \overrightarrow{n'}\ sont\ orthogonaux\Leftrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{n'}=0\Leftrightarrow aa'+bb'=0$. □

Exemple 3 : Parmi les trois droites suivantes identifier les couples de droites parallèles et perpendiculaires :

$$(D_1): -2x+9y=28\ ;\ (D_2): 4x-18y=-12 \text{ et } (D_3): 9x+2y=9$$




• $(D_1)\parallel(D_2)$ car $-2\times(-18)-9\times4=36-36=0$

• $(D_1)\perp(D_3)$ car $-2\times9+9\times2=0$

• $(D_2)\perp(D_3)$ car si deux droites sont parallèlles alors toute droite perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.