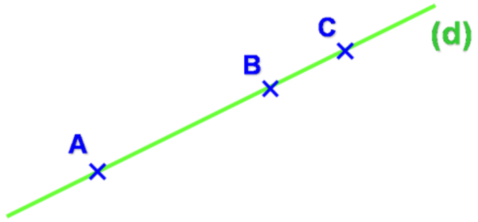
Fiche G3.2 : Alignement

1 – Points alignés

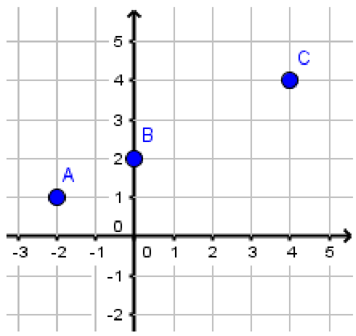
Définition 1 : On dit que trois points sont **alignés** s'ils appartiennent à une même droite.



Méthode : Pour déterminer si 3 points A, B et C sont alignés :

1. On détermine l'équation de la droite passant par deux des points
2. On vérifie que le troisième point appartient cette droite.

Exemple 1 : Les points $A(-2\,;1)$ et $B(0;2)$ et $C(4\,;4)$ sont-ils alignés ?



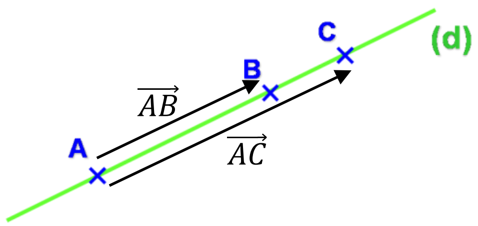
1. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{0-(-2)} = \frac{1}{2} = 0.5$ et $p = 2$ car $B(0;2) \in (AB)$

   La droite (AB) a pour équation $y = 0.5x + 2$.

2. On a $0.5\, x_C + 2 = 0.5 \times 4 + 2 = 2 + 2 = 4 = y_C$

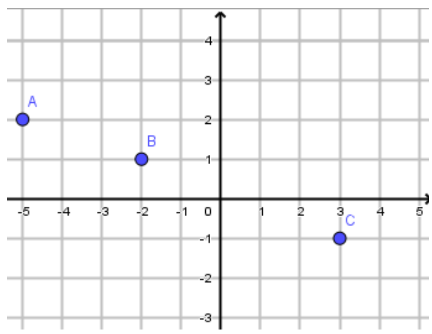
   Donc $C \in (AB)$ et A, B et C sont alignés.

Propriété 2 : Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Exemple 2 : On considère les points $A(-5;2)$, $B(-2;1)$ et $C(3;-1)$

Les points A, B et C sont-ils alignés ?



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-(-5) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-5) \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 3 \times (-3) - (-1) \times 8 = -9 + 8 = -1 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont donc pas colinéaires

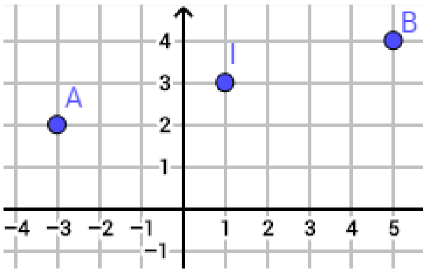
Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 – Milieu d'un segment

Propriété 3 : Dans un repère du plan, on considère les points $A(x_A, x_B)$ et $B(y_A, y_B)$. Le milieu I du segment [AB] a alors pour coordonnées : $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$.

Exemple 3 : On considère les points $A(-3; 2)$, $B(5; 4)$.

Calculer les coordonées du milieu I du segment $[AB]$.

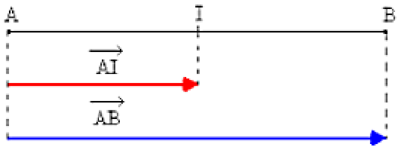


• $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

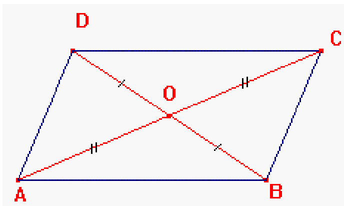
• $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Le point I a pour coordonnées $I(1; 3)$

Propriété 4 : I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$.



Exemple 4 : On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O. En utilisant les propriétés du parallélogramme écrire le plus d'égalité vectorielle possible.



• Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même mesure :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

• Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu :

O milieu de $[AC]$: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC}$.

O milieu de $[BD]$: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DO} = 2\overrightarrow{OB}$.