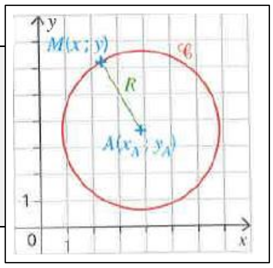
Fiche G3.2 : Equation cartésienne d'un cercle

1 – A partir de son centre et de son rayon



Propriété 1 : On considère un point $A(x_A; y_A)$ et un nombre réel $R > 0$.

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon R est l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Remarques :

• L'égalité précédente est appelée une **équation cartésienne** du cercle $(\mathcal{C})$.

• Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = S$ où $S > 0$, est un cercle de centre $(a; b)$ et de rayon $\sqrt{S}$.

Démonstration : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon $R > 0$

• $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = R^2$.

• Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ d'où $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$.

• Ainsi, $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$.

• Cela prouve que $(\mathcal{C})$ a pour équation cartésienne l'égalité précédente. □

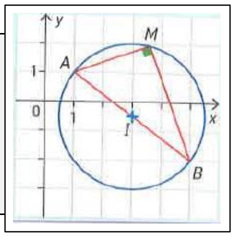
Exemple 1 : Vérifier que le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(4; -1)$ et de rayon 3 a pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

• D'après la propriété 1, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$.

• En developpant, on obtient $(\mathcal{C}): x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 9$ d'où $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$.

2 – A partir de son diamètre



Propriété 2 : On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ a pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{C}): (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Remarque : On peut aussi calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ ainsi que la valeur du rayon IA.

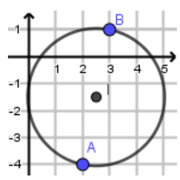
Démonstration : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de de diamètre $[AB]$.

• $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$. Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}$.

• Ainsi, $M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

• Cela prouve que $(\mathcal{C})$ a pour équation cartésienne l'égalité précédente. □

Exemple 2 : Soient $A(2; -4)$ et $B(3; 1)$. Le point $M(0; -1)$ appartient-il au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$?



• $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $(\mathcal{C}): (x - 2)(x - 3) + (y + 4)(y - 1) = 0$.

• $(0 - 2)(0 - 3) + (-1 + 4)(-1 - 1) = 6 - 6 = 0$ donc $M(0; -1) \in (\mathcal{C})$.