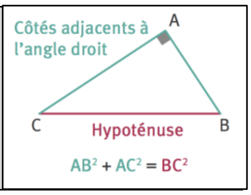
Fiche G3.3 : Trigonométrie

1 – Rappel : Théorème de Pythagore

Théorème 1 : Un triangle est **rectangle** si et seulement si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés :

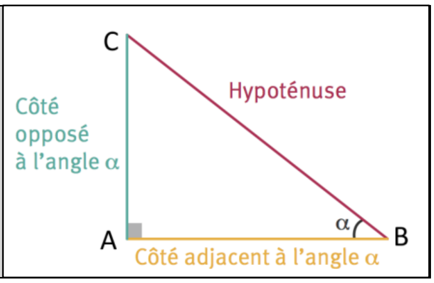
$$ABC \text{ est rectangle en } A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$



2 – Cosinus, Sinus & Tangente

Définition 1 : Soit ABC un triangle rectangle en A. On note α l'angle $\widehat{ABC}$.

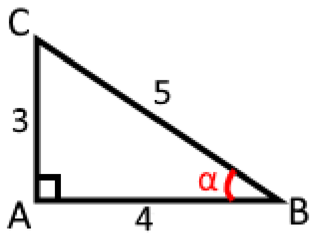
- **Cosinus** de l'angle α : $\cos(\alpha) = \dfrac{côté\ adjacent\ à\ l'angle\ \alpha}{hypothénuse} = \dfrac{AB}{BC}$
- **Sinus** de l'angle α : $\sin(\alpha) = \dfrac{côté\ opposé\ à00\ \alpha}{hypothénuse} = \dfrac{AC}{BC}$
- **Tangente** de l'angle α : $\tan(\alpha) = \dfrac{côté\ opposé\ à\ l'angle\ \alpha}{côté\ adjacent\ à\ l\imath angle\ \alpha} = \dfrac{AC}{AB}$



Remarques :

- On a $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \dfrac{AC}{\cancel{BC}} \times \dfrac{\cancel{BC}}{AB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{côté\ opposé\ à\ l'angle\ \alpha}{côté\ adjacent\ à\ l\imath angle\ \alpha}$.
- On a $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ car l'hypothénuse est le plus grand des côtés.

Exemple 3 : On considère le triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 5$



Soit α l'angle $\widehat{ABC}$ alors on a :

$\cos(\alpha) = \frac{4}{5} = 0.8$; $\sin(\alpha) = \frac{3}{5} = 0.6$ et $\tan(\alpha) = \frac{3}{4} = 0.75$

A la calculatrice[1] on trouve $\alpha = \cos^{-1}(0.8) \approx 39°$

Propriété 1 : Dans un triangle rectangle, pour tout angle aigu α, on a l'égalité $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Remarque : $\cos^2(\alpha)$ et $\sin^2(\alpha)$ désignent le carré de $\cos(\alpha)$ et de $\sin(\alpha)$.

Démonstration : Soit α un angle aigu.

- On considère ABC un triangle rectangle en A tel que $\alpha = \widehat{ABC}$.
- On a : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$
- Or ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- On obtient donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$. □

Exemple 4 : Pour $\alpha = 60°$: on a les valeurs remarquables suivantes : $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ et $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos^2(60°) + \sin(60°)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

[1] La calculatrice doit être réglé en mode « DEGRE » puis on utilise les touches $\boxed{2ND}$ ou $\boxed{SHIFT}$/$\boxed{cos}$