Fiche P1.1 : Probabilités conditionnelles

1 – Probabilité de B sachant A

Définition 1 : Soient A et B deux évènements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est déjà réalisé, est notée $P_A(B)$ (qui se lit « P de B sachant A ») et définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{Probabilité\ de\ l'intersection}{Probabilité\ de\ la\ condition}.$$

Remarque : $P_B(A) \neq P_A(B)$

Exemple 1 : La répartition des groupes sanguins dans la population française est donnée dans le tableau ci-dessous. On choisit une personne au hasard dans la population française.

		Groupe sanguin			
		O	A	B	AB
Rhésus	+	37%	39%	7%	2%
	−	6%	6%	2%	1%

On considère les deux évènements suivants :

A : « La personne est du groupe A »

B : « La personne est de rhésus positif »

- On a : $P(A) = \frac{45}{100} = 0.45$ $\quad P(B) = \frac{85}{100} = 0.85$ $\quad P(A \cap B) = \frac{39}{100} = 0.39$
- $P_A(B)$ désigne la probabilité de choisir une personne de rhésus positif sachant qu'elle est du groupe A :

On a $P_A(B) = \frac{0.39}{0.45} = \frac{39}{45} \approx 0.87$

En effet, sur une base de 100 personnes, il y a 45 individus du groupe A parmi lesquels 39 sont de rhésus $+$.

- $P_B(A)$ désigne la probabilité de choisir une personne du groupe A sachant qu'elle est de rhésus positif.

$P_B(A) = \frac{0.39}{0.85} = \frac{39}{85} \approx 0.46 \neq P_A(B)$

2 – Propriétés

Propriété 1 : Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

On a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

Exemple 2 : Dans un lycée, il y'a 22 % des élèves qui sont en première générale. Parmi ceux-ci, ils sont 55 % a avoir choisi la spécialité « Mathématiques ». On interroge un élève du lycée au hasard. Quelle est la probabilité que l'élève interrogé soit un élève de première ayant choisi la spécialité « Mathématiques ».

G : « La personne est en première générale » et M : « La personne a choisi la spécialité Mathématiques ».

On sait que $P(G) = 0.22$ et $P_G(M) = 0.55$. On cherche $P(G \cap M) = P(G) \times P_G(M) = 0.22 \times 0.55 \approx 0.12$.

Propriété 2 : Soit A un évènement de probabilité non nulle, alors la probabilité conditionnelle P_A vérifie les les propriétés d'une probabilité Autrement dit, pour tous événèments B et C de l'univers Ω on a :

- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(\Omega) = 1$ et $P_A(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P_A(\mathrm{B}) \leq 1$

Exemple 3 : Dans l'exemple 1, la probabilité d'interroger une personne de rhésus négatif sachant qu'elle est du groupe A est donnée par $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) \approx 1 - 0.87 \approx 0.13$