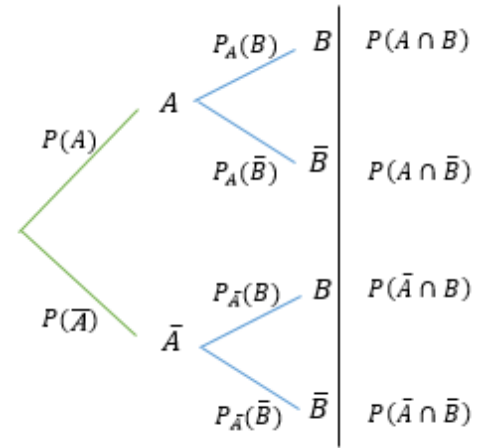


## Fiche P1.2 : Arbres pondérés

### 1 – Règles de calculs dans un arbre pondéré

On peut représenter une situation aléatoire avec des probabilités conditionnelles avec un arbre pondéré.

- Sur le 1<sup>er</sup> niveau on place  $P(A)$  sur la branche qui mène vers  $A$ .
- Sur le 2<sup>e</sup> niveau on place les probabilité conditionnelles :  
 $P_A(B)$  se place sur la branche de  $A$  vers  $B$ .
- Un chemin complet,  $A$  suivi de  $B$ , correspond à l'intersection  $A \cap B$ .
- Règle 1 : À partir d'un même nœud, la somme des probabilités sur les branches est égale à 1.
- Règle 2 : Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.



**Remarque :** Le principe multiplicatif dans un arbre s'appuie sur la formule :  $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ .

**Exemple 1 :** L'Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies (OFDT) a réalisé une enquête auprès des jeunes de 18 à 25 ans sur leur consommation de tabac et d'alcool. Parmi les personnes interrogés :

- 78 % d'entre eux déclarent consommer de l'Alcool (au moins une fois lors du dernier mois)
- Parmi ceux qui consomment de l'alcool, 43 % d'entre eux déclarent consommer également du tabac.
- Parmi ceux qui ne consomment pas d'alcool, 15 % d'entre eux déclarent consommer du tabac.

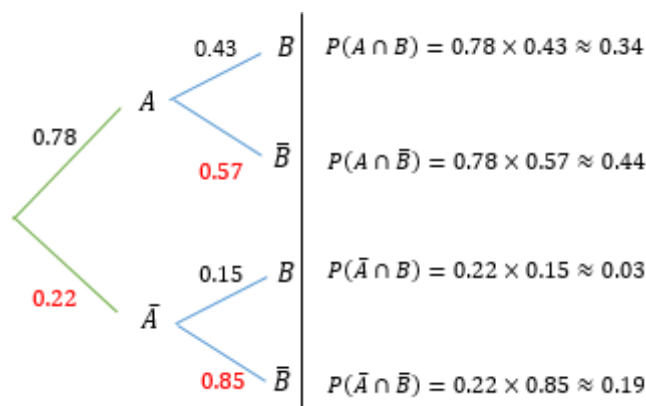
On interroge un jeune au hasard. On considère les évènements suivants :

$A$  : « La personne interrogée consomme de l'alcool » et  $B$  : « La personne interrogée consomme du tabac »

1) Traduire les informations de l'énoncé en probabilité à l'aide des probabilités conditionnelles

$$P(A) = 0.78 ; P_A(B) = 0.43 \text{ et } P_{\bar{A}}(B) = 0.15$$

2) Compléter l'arbre pondéré suivant :



3) a. Quelle est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac et de l'alcool.

D'après l'arbre on a  $P(A \cap B) \approx 0.34$ , donc la probabilité est d'environ 34 %.

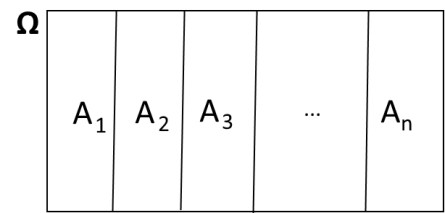
b. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne consomme ni tabac ni alcool.

D'après l'arbre on a  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \approx 0.19$ , donc la probabilité est d'environ 19 %.

## 2 – Formule des probabilités totales

**Définition 1** : On dit que les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment une **partition** de l'univers  $\Omega$  si

- Les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont deux à deux disjoints :  
Pour tous indices  $i$  et  $j$  allant de 1 à  $n$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$
- La réunion des évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est égale à l'univers :  
 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$



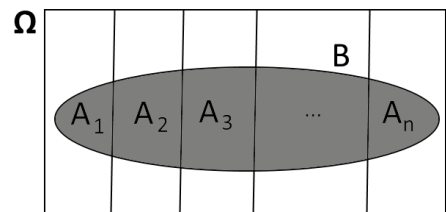
**Exemple 2** : On choisit un élève du lycée au hasard. L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des élèves du lycée. Les évènements  $A_1$  : « L'élève est en seconde » ;  $A_2$  : « L'élève est en première » et  $A_3$  : « L'élève est en Terminale » forment une partition de l'univers  $\Omega$ .

**Remarque** : Un évènement  $A$  de probabilité non nulle et son évènement contraire  $\bar{A}$  forment toujours une partition de l'univers  $\Omega$ .

**Propriété 1** : Soit une partition  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de l'univers  $\Omega$ .

Pour tout évènement  $B$  de l'univers  $\Omega$ , on a la formule suivante, dite **des probabilités totales** :

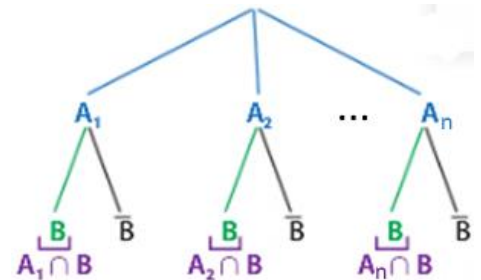
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$



La formule des probabilités totales peut être reformulé comme une troisième règle de calcul dans les arbres pondérés :

Règle 3 : La probabilité d'un évènement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$



**Remarque** : Lorsque que la partition est limitée à un évènement  $A$  et son contraire, on obtient une formule plus simple :  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

**Exemple 3** : Reprenons le contexte de l'exemple 1

- 1) Quelle est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac.

Les évènements  $A$  et  $\bar{A}$  forment une partition de l'univers  $\Omega$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \approx 0.34 + 0.03 \approx 0.37$ , donc la probabilité est d'environ 37 %.

- 2) On interroge un fumeur, quelle est la probabilité qu'il boive de l'alcool ?

On cherche la probabilité d'interroger une personne qui consomme de l'alcool sachant qu'elle consomme du tabac c'est à dire  $P_B(A)$  :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.34}{0.37} \approx 0.92. \text{ Donc la probabilité est d'environ 92\%.}$$

