Fiche P1.3 : Indépendance

1 – Indépendance de deux évènements

On dit que deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité que l'autre se réalise :

Définition 1 : On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$

Exemple 1 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Les deux évènements A: « Piocher un cœur » et B: « Piocher une figure » sont indépendants :

On a $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P_B(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ainsi que $P(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $P_A(B) = \frac{3}{8}$.

Propriété 1 : Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Démonstration :

$\Rightarrow$ Si A et B sont indépendants, comme $P_A(B) = P(B)$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, on a $P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P_B(A)$ et $P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P_A(B)$.

Exemple 2 : Dans l'exemple précédent, on a $P(A \cap B) = \frac{3}{32}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$.

Propriété 2 : Si deux évènements A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B le sont également.

Exemple 3 : Les évènements $\bar{A}$: « Ne pas piocher de cœur » et B: « Piocher une figure » sont indépendants.

2 – Répétition de deux épreuves indépendantes

Définition 2 : Deux expériences aléatoires successives sont dites **indépendantes** si les résultats obtenus à la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde.

Exemple 4 : Lors de la succession de deux lancers d'un dé, les deux lancers sont indépendants. Lorsque l'on pioche successivement et sans remise deux cartes dans un jeu, les deux tirages ne sont pas indépendants.

Remarque : Lorsque la même épreuve est répétée 2 fois de façon indépendante, la probabilité d'obtenir un résultat à la 1$^{\text{ère}}$ épreuve est alors la même qu'à la seconde. Si on représente cette situation, on obtient un arbre pondéré donc chaque nœud est identique. Le principe multiplicatif s'applique alors également ici :

Propriété 3 : La probabilité d'un couple de résultat est égale au produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple 5 : On lance 2 fois de suite un dé bien équilibré. Soit S : « Obtenir 6 ».

Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré puis calculer :

- $P(Obtenir\ un\ double\ six) = P(SS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $P(Obtenir\ aucun\ six) = P(\bar{S}\bar{S}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$
- $P(Obtenir\ un\ seul\ six) = P(S\bar{S}) + P(\bar{S}S) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 2 \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$