Fiche P2.1 : Conditionnement

1 – Arbres pondérés

Pour représenter une expérience aléatoire, il est parfois utile d'utiliser un **arbre pondéré.**

Exemple 1 : L'Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies (OFDT) a réalisé une enquête auprès des jeunes de 18 à 25 ans sur leur consommation de tabac et d'alcool. Parmi les personnes interrogés :

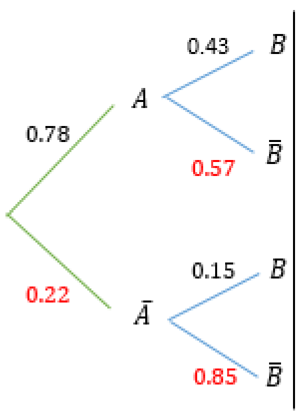
- 78 % d'entre eux déclarent consommer de l'Alcool (au moins une fois lors du dernier mois)
- Parmi ceux qui consomment de l'alcool, 43 % d'entre eux déclarent consommer également du tabac.
- Parmi ceux qui ne consomment pas d'alcool, 15 % d'entre eux déclarent consommer du tabac.

On interroge un jeune au hasard. On considère les évènements suivants :

A : « La personne interrogée consomme de l'alcool »

B : « La personne interrogée consomme du tabac »

1) Compléter l'arbre pondéré suivant :



$P(A \cap B) = 0.78 \times 0.43 \approx 0.34$

$P(A \cap \bar{B}) = 0.78 \times 0.57 \approx 0.44$

$P(\bar{A} \cap B) = 0.22 \times 0.15 \approx 0.03$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.22 \times 0.85 \approx 0.19$

2) a. Quel est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac et de l'alcool.

   D'après l'arbre on a $P(A \cap B) \approx 0.34$, donc la probabilité est d'environ 34 %.

   b. Quel est la probabilité que la personne interrogée ne consomme ni tabac ni alcool.

   D'après l'arbre on a $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \approx 0.19$, donc la probabilité est d'environ 19 %.

3) Quel est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac.

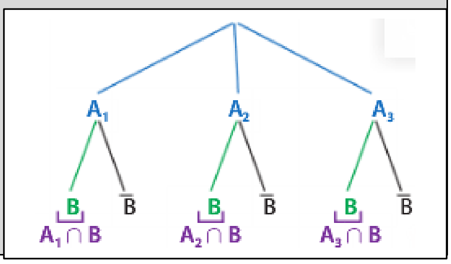
   $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \approx 0.34 + 0.03 \approx 0.37$, donc la probabilité est d'environ 37 %.

Propriété 1 : Dans un arbre pondéré, on peut utiliser les 3 règles suivantes

- **Règle 1** : À partir d'un même nœud, la somme des probabilités est égale à 1.
- **Règle 2** : Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.
- **Règle 3** (Formule des probabilités totales) :

La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

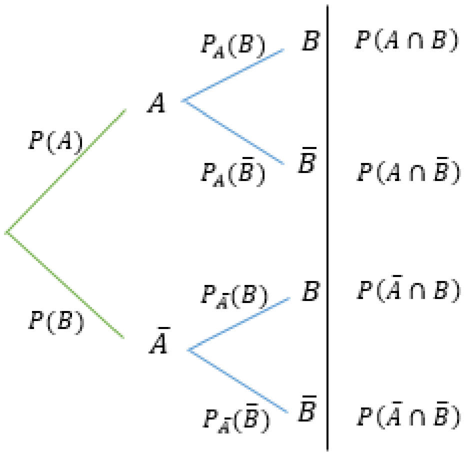


2 – **Probabilité conditionnelle**

Définition 1 : On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, et on note $P_A(B)$, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

Exemple 1 (Suite) : Dans cet exemple, $P_A(B)$ désigne la probabilité que la personne interrogé consomme du tabac sachant qu'elle consomme de l'alcool. On a donc $P_A(B) = 0.43$

Remarque : Sur un arbre pondéré $P_A(B)$ se place sur la branche de A vers B



La lecture de l'arbre précédent, nous permet d'obtenir la formule : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

On a donc la propriété suivante :

Propriété 2 : On considère deux évènements A et B. On a la formule suivante :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\text{"}intersection\text{"})}{P(\text{"}condition\text{"})}$$

Exemple 1 (Suite) : On interroge un fumeur, quelle est la probabilité qu'il boive de l'alcool ?

On cherche la probabilité d'interroger une personne qui consomme de l'alcool sachant qu'elle consomme du tabac c'est à dire $P_B(A)$: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.34}{0.37} \approx 0.92$. Donc la probabilité est d'environ 92%.

Remarque : Attention, $P_A(B) \neq P_B(A)$.