Fiche P2.1 : Variable aléatoire & Loi de probabilité

1 – La notion de variable aléatoire

Une variable aléatoire est une variable numérique dont la valeur dépend du hasard :

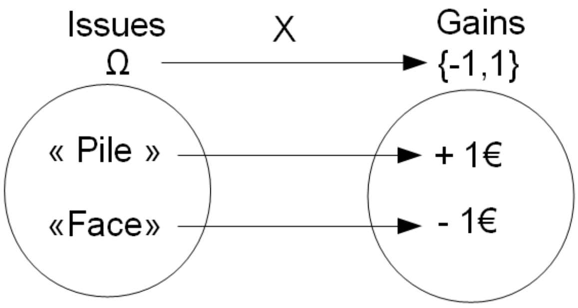
Définition 1 : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire** X est une fonction qui à chaque issue w de Ω associe un unique nombre réel.

Remarques : On dit que la variable X est de type **fini** lorsqu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

- On note alors $E = \{x_1, x_{2,}, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable X.
- On note $X = x_i$ l'événement composé des issues qui mènent au réel x_i.
- On définit de manière analogue les évènements $X \leq x_i$, $X \geq x_i$, $X < x_i$ et $X > x_i$.

Exemple 1 : On considère le jeu suivant : On lance une pièce. Si la pièce tombe sur « $Pile$ » alors on gagne 1 €, si la pièce tombe sur « $Face$ » on perd 1 €. Représenter cette situation à l'aide d'une variable alétoire.

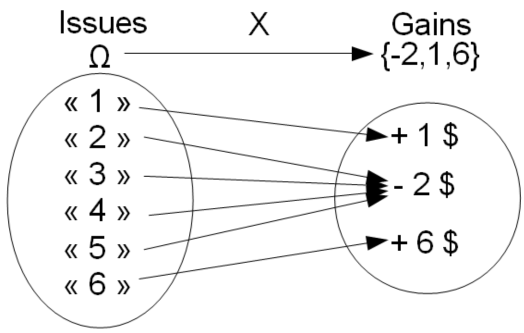
- L'univers est $\Omega = \{Pile\,; Face\}$.
- Soit X le gain du joueur. X est une variable aléatoire.
- L'ensemble des valeurs possibles pour X est $E = \{-1; 1\}$.
- On a $X(Pile) = 1$ et $X(Face) = -1$.
- « $X = 1$ » correspond à l'évènement « $Pile$ ».
- Si la pièce est bien équilibré on a : $P(X = 1) = 0{,}5$.



Exemple 2 : On considère le jeu suivant : On lance un dé. Si le dé tombe sur « 1 » alors on gagne 1 $, si le dé tombe sur « 6 » on gagne 6 $, sinon on perd 2 $. Représenter cette situation à l'aide d'une variable alétoire.

- L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Soit X le gain du joueur. X est une variable aléatoire.
- L'ensemble des valeurs possibles pour X est $E = \{-2; 1; 6\}$.
- On a $X(1) = 1$, $X(2) = -2$; etc.
- « $X = -2$ » correspond à l'événement {2,3,4,5}.

  « $X \geq 0$ » correspond à l'événement {1,6}.
- Si le dé est bien équilibré on a : $P(X \geq 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



Exemple 3 : A l'aide de la calculatrice, on peut générer un nombre aléatoire entre 0 et 1.

- Appuyer sur la touche $\boxed{MATH}$ puis sélectionner le menu PROB puis sélectionner l'instruction $NbrAleat$.
- Si on note X le résultat obtenu alors X est une variable aléatoire.
- X peut prendre une infinité de valeurs possibles : On dit qu'il s'agit d'une variable **continue**.
- L'ensemble des valeurs possibles pour X est $E = [0; 1]$.
- On a par exemple $P(X \leq 0.5) = \frac{1}{2}$

$\boxed{2}$ – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2 : Soit X une variable aléatoire de type fini. On appelle **loi de probabilité** de X, la donnée de toutes les probabilités $P(X = x_i)$ où x_i prend toutes les valeurs de E.

Remarque : On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_n
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple 1 (Suite) : Si la pièce est bien équilibré la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	1
$P(X = x_i)$	0,5	0,5

Exemple 2 (Suite) : Si le dé est bien équilibré la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	6
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Propriété 1 : On a $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1$ ou bien $p_1 + \cdots + p_n = 1$.