Fiche P2.2 : Indépendance

1 – Indépendance de deux évènements

On dit que deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité que l'autre se réalise :

Définition 1 : On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$

Exemple 1 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Les deux évènements A: « Piocher un cœur » et B: « Piocher une figure » sont indépendants :

On a $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P_B(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ainsi que $P(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $P_A(B) = \frac{3}{8}$.

Propriété 1 : Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple 2 : Dans l'exemple précédent, on a $P(A \cap B) = \frac{3}{32}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$.

Propriété 2 : Si deux évènements A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B le sont également.

Exemple 3 : Les évènements $\bar{A}$: « Ne pas piocher de cœur » et B: « Piocher une figure » sont indépendants.

2 – Répétition de deux épreuves indépendantes

Définition 2 : Deux expériences aléatoires successives sont dites **indépendantes** si les résultats obtenus à la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde.

Exemple 4 :

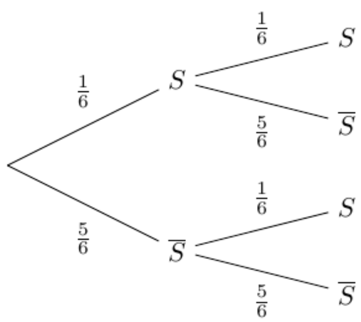
Lors de la succession de deux lancers d'un dé, les deux lancers sont indépendants.
Lorsque l'on pioche successivement et avec remise 2 billes dans une urne, les deux tirages sont indépendant.
Lorsque l'on pioche successivement et sans remise 2 cartes dans un jeu, les deux tirages ne sont pas indépendants.

Remarque : Lorsque la même épreuve est répétée 2 fois de façon indépendante, la probabilité d'obtenir un résultat à la 1$^{\text{ère}}$ épreuve est alors la même qu'à la seconde. Si on représente cette situation, on obtient un arbre pondéré donc chaque nœud est identique. Le principe multiplicatif s'applique alors également ici :

Propriété 3 : La probabilité d'un couple de résultat est égale au produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple 5 : On lance 2 fois de suite un dé bien équilibré. Soit S : « Obtenir 6 ».

Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré puis calculer :



- $P(Obtenir\ un\ double\ six) = P(SS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $P(Obtenir\ aucun\ six) = P(\bar{S}\bar{S}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$
- $P(Obtenir\ un\ seul\ six) = P(S\bar{S}) + P(\bar{S}S) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 2 \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$