Fiche P2.2 : Paramètres d'une variable aléatoire

1 – Espérance d'une variable aléatoire

Définition 1 : Soit X une variable aléatoire de type fini. On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le nombre, noté $E(X)$, donné par : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

Remarque : L'espérance $E(X)$ peut s'interpréter comme la **valeur moyenne** prise par la variable X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple 1 : On considère le jeu suivant : On lance une pièce. Si la pièce tombe sur « $Pile$ » alors on gagne 1 €, si la pièce tombe sur « $Face$ » on perd 1 €. Calculons l'espérance de la variable X.

On a $E(X) = (-1) \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$.

Cela signifie qu'en moyenne le joueur ne gagnera ni ne perdra d'argent. On dira que le jeu est **équitable**.

Exemple 2 : On considère le jeu suivant : On lance un dé. Si le dé tombe sur « 1 » alors on gagne 1 \$, si le dé tombe sur « 6 » on gagne 6 \$, sinon on perd 2 \$. Calculons l'espérance de la variable X.

On a $E(X) = (-2) \times \frac{4}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \approx -0{,}17$.

Cela signifie, qu'en moyenne le joueur perdra 0,17€ par partie.

Remarque : Dans les jeux de hasard de la vie réelle, (la roulette, le loto, les tickets à gratter, etc) l'espérance du joueur est négatif : Ce que l'on perd en moyenne correspond à ce que gagne l'organisateur du jeu.

2 – Variance & Ecart-type

Définition 2 : Soit X une variable aléatoire de type fini.

- On appelle **variance** de la variable aléatoire X le nombre, noté $V(X)$, donné par :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + (x_2 - E(X))^2p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2p_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2p_i$$

- On appelle **écart-type** de la variable aléatoire X le nombre, noté $\sigma(X)$, donné par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque : Variance et Ecart-type mesurent la répartition des valeurs de la variable autour de l'espérence : Plus ces paramètres sont élevées, plus les valeurs prises par la variable X seront **dispersées** lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. On utilise plus souvent l'écart-type qui a l'avantage de posséder la même unité que les valeurs.

Exemple 1 (Suite) : Calculons la variance et l'écart-type de la variable X. Comme $E(X) = 0$

$V(X) = (-1-0)^2 \times 0{,}5 + (1-0)^2 \times 0{,}5 = 1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 1$. et $\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$

Exemple 2 : (Suite) : Calculons la variance et l'écart-type. Comme $E(X) = -\frac{1}{6}$.

$$V(X) = \left(-2-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 \times \frac{4}{6} + \left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(6-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 \times \frac{1}{6} = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{4}{6} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{37}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{100}{216} + \frac{49}{216} + \frac{1369}{216} = \frac{1518}{216} = \frac{253}{36} \approx 7.03$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{253}{36}} = \frac{\sqrt{253}}{6} \approx 2.65.$$