

Fiche S1.2 : Sens de variation

1 – Suite croissante, décroissante et constante

Définition 3 :

- Une suite (u_n) est dit **croissante** si chaque terme est plus grand que le précédent, c'est-à-dire pour tout rang n , on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est dit **décroissante** si chaque terme est plus petit que le précédent, c'est-à-dire pour tout rang n , on a $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est dit **constante** si chaque terme est égal au précédent, c'est-à-dire pour tout rang n , on a $u_{n+1} = u_n$.

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$

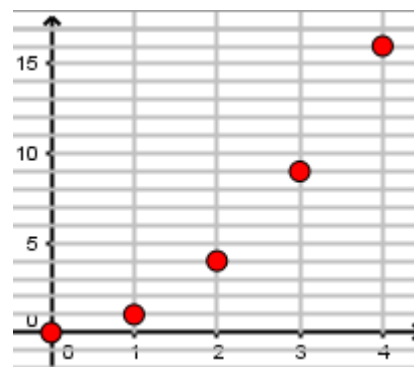
On a : $(u_n) = (0; 1; 4; 9; 16; 25; \dots)$

Chaque terme est plus **grand** que le précédent :

Pour tout rang n on a : $u_{n+1} \geq u_n$.

La représentation graphique de (u_n) **monte**.

On dit que la suite (u_n) est **croissante**.



Exemple 2 : Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{n+1}$

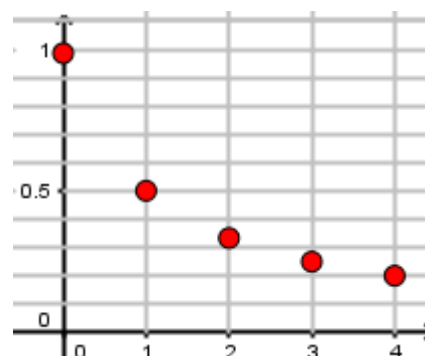
On a : $(v_n) = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots)$

Chaque terme est plus **petit** que le précédent :

Pour tout rang n on a : $v_{n+1} \leq v_n$.

La représentation graphique de (v_n) **descend**.

On dit que la suite (v_n) est **décroissante**.



Exemple 3 : Soit la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = 2w_n - 1 \end{cases}$$

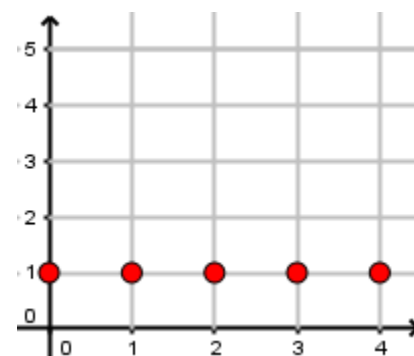
On a : $(w_n) = (1; 1; 1; 1; 1; \dots)$

Chaque terme est **égal** au précédent :

Pour tout rang n on a : $w_{n+1} = w_n$.

La représentation graphique de (w_n) **est stable**.

On dit que la suite (w_n) est **constante**.



2 – Méthodes pour déterminer le sens de variation

Propriété 1 : Soit f une fonction **monotone**¹ sur $[0; +\infty[$ et (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$. Alors le sens de variation de la suite est le même que celui de la fonction f .

Exemple 4 : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$

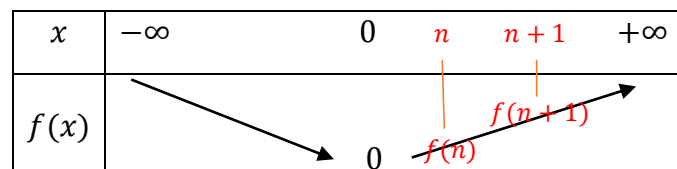
On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = x^2$

Or, la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

Donc, pour tout entier naturel n , on a $f(n+1) \geq f(n)$

Donc, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} \geq u_n$

Donc la suite (u_n) est croissante.



Propriété 2 : Soit (u_n) une suite numérique.

- Si pour tout rang n , on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante.
- Si pour tout rang n , on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante.

Exemple 5 : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n$

Pour tout rang n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{(n+1)^2 + (n+1)}_{u_{n+1}} - \underbrace{(n^2 + n)}_{u_n} = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 > 0$$

En effet, si $n > 0$ alors $2n > 0$ et donc $2n + 2 > 0$.

Ainsi pour tout rang n , on a $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite numérique à termes **strictement positifs** : Pour tout rang n , $u_n > 0$

- Si pour tout rang n , on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite est croissante
- Si pour tout rang n , on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite est décroissante

Exemple 6 : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3}{2n+1}$

La suite (u_n) est à termes strictement positifs car $3 > 0$ et pour tout rang n , $2n + 1 > 0$

$$\text{Pour tout rang } n, \text{ on a } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{2(n+1)+1}}{\frac{3}{2n+1}} = \frac{3}{2n+2+1} \times \frac{2n+1}{3} = \frac{2n+1}{2n+3} < 1$$

En effet, pour tout entier naturel n , $2n + 1 < 2n + 3$

Ainsi pour tout rang n , on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

¹ On dit qu'une fonction est **monotone** sur un intervalle I si elle ne change pas de sens de variation sur I