Fiche S1.3 : Vers la notion de limite

1 – Limite infinie

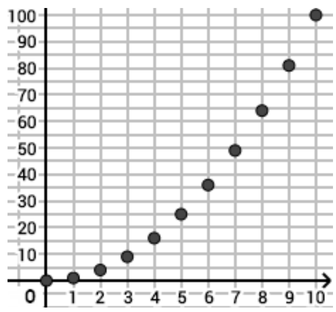
Définition 1 :

- On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, si pour tout nombre réel A aussi grand que l'on veut, il existe un rang à partir duquel, tous les termes sont supérieurs à A. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, si pour tout nombre réel A aussi grand que l'on veut, il existe un rang à partir duquel, tous les termes sont inférieurs à $-A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Vocabulaire : On dit dans ce cas que la suite « **tend vers** $+\infty$ ou $-\infty$ ».

Explication : Dire qu'une suite tend vers l'infini signifie que les termes de la suite dépassent, à partir d'un certain rang, n'importe quelle valeur A fixé à l'avance.

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$



1) Calculer les premiers termes de la suite (u_n).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

2) Dans le repère ci-contre, représenter le suite (u_n).

3) Que se passe-t-il lorsque n devient de plus en plus grand ? Quelle est sa limite ?

Les termes de la suite sont de plus en plus grand, aussi grand que l'on veut, en prenant un rang suffisamment grand. La limite de la suite est donc $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

	A	B
1	n	u_n
2	30	900
3	31	961
4	32	1024
5	33	1089
6	…	…
7	99	9801
8	100	10000
9	…	…
10	314	98596
11	315	99225
12	316	99856
13	317	100489

4) Dans le tableur, quelle formule doit-on entrer dans la cellule $B2$, pour calculer les termes de la suite u_n à l'aide du recopiage automatique ? On entre $= A2$^2

5) Déterminer le rang à partir duquel tous les termes sont :

- Supérieur à $A = 100$: $n = 10$
- Supérieur à $A = 1000$: $n = 32$
- Supérieur à $A = 10000$: $n = 100$
- Supérieur à $A = 100000$: $n = 317$

6) Compléter puis exécuter l'algorithme suivant afin que celui-ci affiche le rang à partir duquel tous les termes de la suite seront supérieurs à $A = 100\,000$.

Algorithme

Variables : n, u
$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 0$
Tant que $u < 100000$ *Faire*
$\quad n \leftarrow n + 1$
$\quad u \leftarrow n^2$
Fin Tant que
Afficher n

Exécution

$n = 0$
$u = 0$
$u < 100\,000$
$n = 1$
$u = 1$
$u < 100\,000$
…
$n = 317$
$u = 100489$
$u \geq 100\,000$
Afficher « 317 »

Programme Python

```
from math import*

n=0
u=0
while u<100000 :
    n=n+1
    u=n**2
print(n)
```

2 – Limite finie

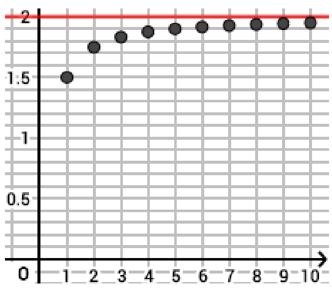
<u>Définition 2</u> : Soit l un nombre réel. On dit que la suite (u_n) a pour limite l, si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, il existe un rang à partir duquel, tous les termes sont à une distance de l inférieur à ε. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

<u>Remarque</u> : Dire que la distance entre u_n et l est inférieure à ε s'écrit[1] $|u_n - l| < \varepsilon$

<u>Vocabulaire</u> : On dit dans ce cas que la suite « **tend vers** l ».

<u>Explication</u> : Dire qu'une suite tend vers l signifie, qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapproche aussi proche que l'on veut de l, à une distance inférieure à n'importe quel écart ε fixé à l'avance.

<u>Exemple 2</u> : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{4n-1}{2n}$



1) A l'aide de la calculatrice, calculer les premiers termes de la suite (u_n).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1.5	1.75	1.83	1.87	1.9	1.91	1.92	1.93	1.94	1.95

2) Dans le repère ci-contre, représenter le suite (u_n).

3) Que se passe-t-il lorsque n devient de plus en plus grand ? Quel est sa limite ?

Les termes de la suite se rapproche de plus en plus de « 2 », aussi proche que l'on veut, en prenant un rang suffisamment grand. La limite de la suite est donc 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

4) Dans le tableur, quelle formule doit-on entrer dans la cellule $B2$, pour calculer les termes de la suites u_n à l'aide du recopiage automatique ?

	A	B
1	n	u_n
2	46	1,9891304
3	47	1,9893617
4	48	1,9895833
5	49	1,9897959
6	50	1,99
7	51	1,9901961
8	52	1,9903846

On entre $= (4 * A2 - 1)/(2 * A2)$

5) Déterminer le rang à partir duquel tous les termes sont distant de la limite de :

- Moins de $\varepsilon = \frac{1}{10}$: $n = 6$
- Moins de $\varepsilon = \frac{1}{100}$: $n = 51$

6) Calculer la distance entre u_{46} et sa limite (arrondie à 10^{-4} près)

$$|u_{46} - 2| \approx |1.9891 - 2| = |-0.0109| = 0.0109$$

7) Compléter puis exécuter l'algorithme suivant afin que celui-ci affiche le rang à partir duquel tous les termes de la suite seront distant de moins de $\varepsilon = \frac{1}{100}$ de la limite.

Algorithme

Variables : n, u
$n \leftarrow 1$
$u \leftarrow 1.5$
Tant que $|u - 2| \geq 0.01$ *Faire*
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow \frac{4n-1}{2n}$
Fin Tant que
Afficher n

Exécution

$n = 1$
$u = 1.5$
$|1.5 - 2| = 0.5 \geq 0.01$
$n = 2$
$u = 1.75$
$|1.75 - 2| = 0.25 \geq 0.01$
…
$n = 51$
$u \approx 1.9901$
$|1.9901 - 2| = 0.099 < 0.01$
Afficher « 51 »

Programme Python

```
from math import*

n=1
u=1.5
while abs(u-2)>=0.01 :
    n=n+1
    u=(4*n-1)/(2*n)
print(n)

# Attention aux parenthèses
```

[1] $|x|$ désigne la **valeur absolue** de x : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.