Fiche S1.1 : Suites arithmétiques

1 – Définition

Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** r si pour tout rang n, on a $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple 1 :

● Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

Pour tout rang n, $u_{n+1} = u_n + 2$. On a donc $(u_n) = (1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$

● Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $r = -3$.

Pour tout rang n, on a $v_{n+1} = v_n - 3$. On a donc $(v_n) = (10; 7; 4; 1; -2; -5; \dots)$

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4n + 5$.

Pour tout rang n, $u_{n+1} - u_n = 4(n + 1) + 5 - (4n + 5) = 4n + 4 + 5 - 4n - 5 = 4$

La différence entre deux termes consécutifs est donc constante égal à 4.

Pour tout rang n, on a $u_{n+1} = u_n + 4$.

En conclusion la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 4 \times 0 + 5 = 5$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

On a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$. On a donc $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 3$

La différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante. La suite n'est donc pas arithmétique.

2 – Formule explicite

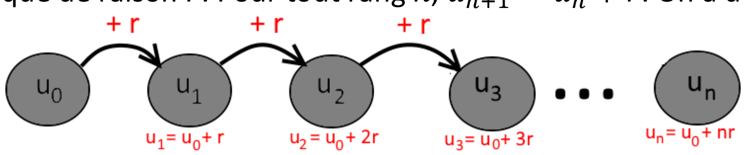
Propriété 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout rang n, on a $u_n = u_0 + nr$

Remarque : Plus généralement, si k est un entier naturel, pour tout rang $n \geq k$, on a $u_n = u_k + (n - k)r$

En particulier, lorsque le premier terme est u_1 on utilise la relation $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Démonstration : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Pour tout rang n, $u_{n+1} = u_n + r$. On a donc :

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r \\ u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r \\ \qquad \dots \end{cases}$$



Ainsi pour arriver jusqu'à u_n, en partant de u_0, on aura rajouter n fois la raison : $u_n = u_0 + nr$ □

Remarque : La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans calculer tous les précédents.

Exemple 4 :

● Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

Pour tout rang n, on a $u_n = 1 + n \times 2 = 2n + 1$; $u_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$.

● Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 7$ et de raison $r = -3$.

Pour tout rang n on a $v_n = 7 + (n - 1) \times (-3) = 7 - 3n + 3 = -3n + 10$; $v_{10} = -3 \times 10 + 10 = -20$.

3 – Sens de variation

Propriété 2 : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r.

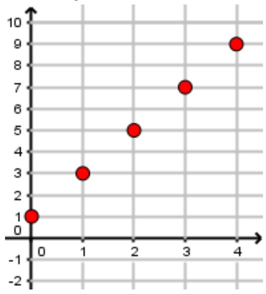
● Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante

● Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante

● Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante

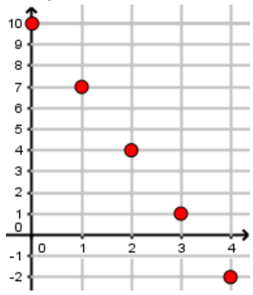
Exemple 5 :

● $u_0 = 1\,; r = 2$



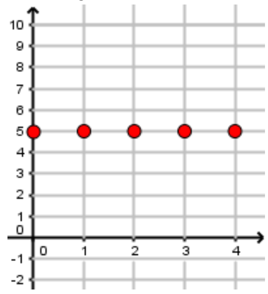
(u_n) est croissante

● $v_0 = 10\,; r = -3$



(v_n) est décroissante

● $w_0 = 5\,; r = 0$



(w_n) est constante

4 – Limites

Propriété 3 : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0.

● Si $r > 0$ alors la suite a pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

● Si $r < 0$ alors la suite a pour limite $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

● Si $r = 0$ alors la suite a pour limite u_0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

Exemple 5 : On reprend les suites de l'exemple précédent, on a :

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ● $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ ● $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 5$

5 – Evolution linéaire

Propriété 4 : Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont **alignés.**

Démonstration : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

● On considère la droite (d) qui a pour coefficient directeur r et pour ordonnée à l'origine u_0.

Cette droite a pour équation $y = \underbrace{r}_{a}\,x + \underbrace{u_0}_{b}$.

● Les points $(\underbrace{n}_{x}\,; \underbrace{u_n}_{y})$ de la représentation graphique de (u_n) appartiennent tous à (d) car la formule explicite nous permet d'écrire que, pour tout rang n, $\underbrace{u_n}_{y} = u_0 + nr = r\,\underbrace{n}_{x} + u_0$. □

Exemple 6 : Les points de la suite (u_n) de l'exemple 5 appartiennent à la droite d'équation $y = 2x + 1$

Remarque : On utilise les suites arithmétiques pour modéliser des situations où l'évolution est **linéaire.**

Exemple 7 : On ouvre un compte où l'on place $10\,000$€. Chaque année on reçoit 5% de la somme initiale (intérêts simples). Soit u_n le montant sur le compte n années après son ouverture.

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 10000$ et de raison $r = 500$ (5% de $10\,000$).