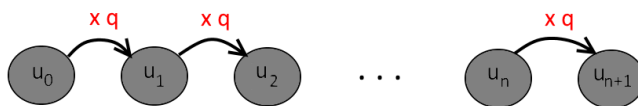


Fiche S2.2 : Suites géométriques

1 – Définition

Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** q si pour tout rang n , on a $u_{n+1} = q \times u_n$



Exemple 1 :

• Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

Pour tout rang n on a $u_{n+1} = 3 \times u_n$ On a donc $(u_n) = (1; 3; 9; 27; 81; 243; \dots)$

• Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Pour tout rang n on a $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$. On a donc $(v_n) = (2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots)$

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.

Pour tout rang n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2}{2^n} = 2$. Le quotient entre deux termes consécutifs est constant égal à 2.

Pour tout rang n on a $u_{n+1} = 2 \times u_n$.

En conclusion la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 2^0 = 1$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

On a $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 9$

On a donc $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{1} = 4$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4} = 2.25$

Le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas constant. La suite n'est donc pas géométrique

2 – Formule explicite

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout rang n , on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Remarque : Plus généralement, si k est un entier naturel, pour tout rang $n \geq k$, on a $u_n = u_k \times q^{n-k}$.

En particulier, lorsque le premier terme est u_1 , on utilisera la formule $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Démonstration : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Pour tout rang n , $u_{n+1} = q \times u_n$. On a donc :

$$\begin{cases} u_1 = q \times u_0 \\ u_2 = q \times u_1 = q \times q \times u_0 = q^2 \times u_0 \\ u_3 = q \times u_2 = q \times q^2 \times u_0 = q^3 \times u_0 \\ \dots \\ u_n = q^n \times u_0 \end{cases}$$

Ainsi pour arriver jusqu'à u_n , en partant de u_0 , on aura multiplié n fois par la raison : $u_n = q^n \times u_0$ \square

Remarque : La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans calculer tous les précédents.

Exemple 4 :

• Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

Formule explicite : Pour tout rang n , $u_n = 1 \times 3^n = 3^n$ $u_{10} = 3^{10} = 59049$

• Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Formule explicite : Pour tout rang n , $v_n = 2 \times (0.5)^{n-1}$ $v_{10} = 2 \times 0.5^{10-1} = 2 \times 0.5^9 \cong 0.0039$

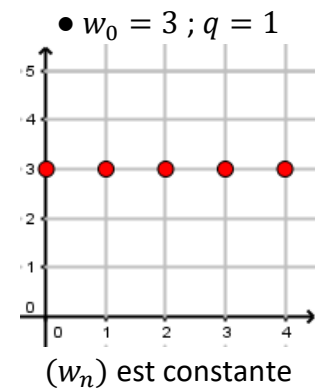
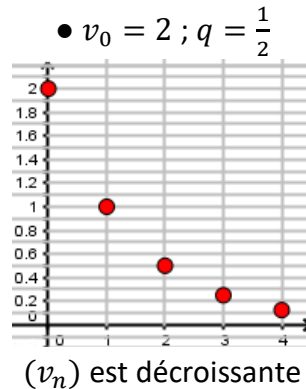
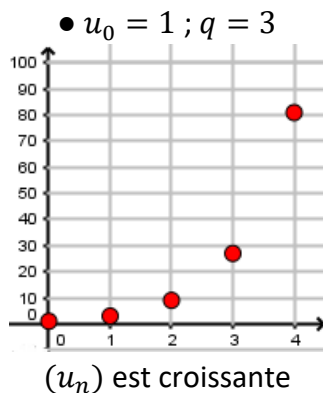


3 – Sens de variation

Propriété 2 : On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.

Exemple 5 :



Remarques :

- Si $u_0 < 0$ alors les sens de variation sont inversés : décroissant si $q > 1$ et croissant si $0 < q < 1$.
- Si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone : Les termes oscillent indéfiniment entre positif et négatif.

4 – Limites

Propriété 3 : On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ et de premier terme u_0 .

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors la suite a pour limite $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors la suite a pour limite $-\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors la suite a pour limite 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$ alors la suite a pour limite u_0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

Exemple 7 : On reprend les suites de l'exemple précédent, on a :

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$$

5 – Evolution exponentielle

- On utilise les suites géométriques pour modéliser des situations où l'évolution est **exponentielle**
- Lorsqu'une quantité subit plusieurs évolutions successives d'un même pourcentage $a\%$, alors on peut modéliser mathématiquement l'évolution de cette quantité par une suite géométrique, de 1^{er} terme u_0 égale à sa valeur initiale, et de raison $q = 1 + \frac{a}{100}$.

Exemple 8 : On ouvre un compte où l'on place 10 000€. Chaque année on reçoit 5% de la somme présente sur le compte (intérêts composés). Soit u_n le montant sur le compte n années après son ouverture.

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 10000$ et de raison $q = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$.

