Fiche ____ : Somme des termes

Soit (u_n) une suite quelconque. On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) :

$S_n =$ ________________________ que l'on note aussi $S_n =$ ___________

1 – Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 1 :

Remarque : $1 + 2 + \cdots + n$ s'écrit également ___________

Exemple 1 : La somme des 100 premiers entiers est égale à ____

Démonstration 1 : (suggéré par le mathématicien Carl Friedrich Gauss alors qu'il avait seulement 10 ans !)

• L'idée est d'écrire deux fois la somme S_n des n premiers entiers mais dans le sens inverse :

$S_n =$

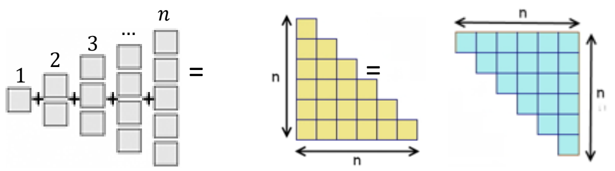
$S_n =$

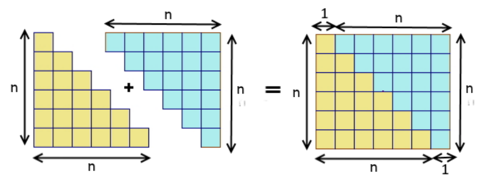
• En additionnant les deux lignes on obtient :

____

• En divisant l'égalité précédente par 2, on obtient le résultat souhaité : ____________________ □

Démonstration 2 : (Géométrique)





____ ____________________________________ □

Propriété 1 :

Démonstration : On raisonne de la même manière que dans la démonstration 1

• $S_n =$ • Or verticalement les sommes sont identiques :

$S_n =$

• On additionne les 2 lignes : ____

• En divisant l'égalité précédente par 2, on obtient le résultat souhaité : ______________________ □

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 5$ et de 1er terme $u_0 = 8$. Calculer S_{10}.

$\boxed{2}$ – Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 1 :

Remarques :

- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ s'écrit également $\sum_{k=0}^{n} q^k$ (Par convention on a $q^0 = 1$)
- Si $q = 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots 1}_{n+1\, fois} = n + 1$

Exemple 3 : $\sum_{k=0}^{10} 5^k =$ ____

Démonstration : Soit $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. On utilise une somme dite « télescopique »

- On calcule $(1 - q)S_n =$

$=$

$=$

$=$

- On passe $1 - q$ de l'autre côté et on obtient le résultat voulu : ____________________ □

Propriété 1 :

Démonstration :

$S_n =$

$=$ On utilise décompose chaque terme avec u_0

$=$ On factorise par u_0

$=$ On remplace $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ par sa valeur □

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1er terme $u_0 = 3$. Calculer S_9.