

## Fiche S2.3 : Somme des termes

Soit  $(u_n)$  une suite quelconque. On note  $S_n$  la somme des  $n + 1$  premiers termes (de  $u_0$  à  $u_n$ ) :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ que l'on note aussi } S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

### 1 – Somme des termes d'une suite arithmétique

**Propriété 1** : La somme des  $n$  premiers entiers naturels non nuls est égal à :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Remarque** :  $1 + 2 + \dots + n$  s'écrit également  $\sum_{k=1}^n k$

**Exemple 1** : La somme des 100 premiers entiers est égale à  $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$

**Démonstration 1** : (suggéré par le mathématicien Carl Friedrich Gauss alors qu'il avait seulement 10 ans !)

• L'idée est d'écrire deux fois la somme  $S_n$  des  $n$  premiers entiers mais dans le sens inverse :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

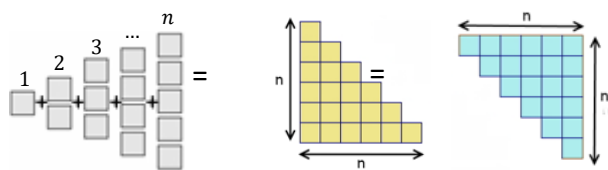
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

• En additionnant les deux lignes on obtient :

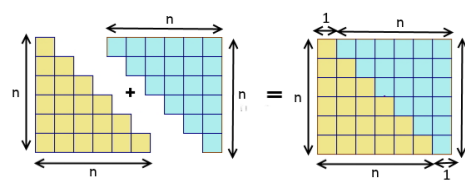
$$2 \times S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}} = n \times (n+1)$$

• En divisant l'égalité précédente par 2, on obtient le résultat souhaité :  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$  □

**Démonstration 2** : (Géométrique)



Il y a  $S_n = 1 + 2 + \dots + n$  carreaux



$$2 \times S_n = n \times (n+1) \text{ d'où } S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \square$$

**Propriété 1** : La somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite arithmétique de raison  $r$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$

est égal à :  $S_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$

**Démonstration** : On raisonne de la même manière que dans la démonstration 1

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

• Or verticalement les sommes sont identiques :

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1 + u_0$$

$$(u_0 + u_n) = \underbrace{(u_1 + u_{n-1})}_{u_0 + r + u_n - r} = \underbrace{(u_2 + u_{n-2})}_{u_0 + 2r + u_n - 2r} = \dots$$

• On additionne les 2 lignes :  $2 \times S_n = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)}_{n+1 \text{ fois}} = (n+1) \times (u_0 + u_n)$

• En divisant l'égalité précédente par 2, on obtient le résultat souhaité :  $S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$  □

**Exemple 2** : Soit  $(u_n)$  la suite arithmétique de raison  $r = 5$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = 8$

$$S_{10} = (10 + 1) \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{8 + 58}{2} = 11 \times \frac{66}{2} = 11 \times 33 = 363 \text{ (On a } u_{10} = 8 + 10 \times 5 = 58)$$



## 2 – Somme des termes d'une suite géométrique

**Propriété 1** : Si  $q \neq 1$  alors  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

**Remarques** :

- $1 + q + q^2 + \dots + q^n$  s'écrit également  $\sum_{k=0}^n q^k$  (Par convention on a  $q^0 = 1$ )
- Si  $q = 1$  alors  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1$

**Exemple 3** :  $\sum_{k=0}^{10} 5^k = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{10} = \frac{1-5^{10+1}}{1-5} = \frac{1-5^{11}}{-4} = 12\,207\,031$

**Démonstration** : Soit  $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ . On utilise une somme dite « télescopique »

- On calcule  $(1 - q)S_n = S_n - qS_n$ 
$$\begin{aligned} &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n - q(1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n) \\ &= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

- On passe  $1 - q$  de l'autre côté et on obtient le résultat voulu :  $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  □

**Propriété 1** : La somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  et de 1<sup>er</sup> terme

$u_0$  est égal à :  $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nombre de termes}}}{1-q}$

**Démonstration** :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n \quad \text{On utilise décompose chaque terme avec } u_0$$

$$= u_0(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \quad \text{On factorise par } u_0$$

$$= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{On remplace } 1 + q + q^2 + \dots + q^n \text{ par sa valeur} \quad \square$$

**Exemple 2** : Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de raison  $q = 2$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = 3$

$$S_9 = 3 \times \frac{1-2^{9+1}}{1-2} = 3 \times \frac{1-2^{10}}{-1} = 3069 \quad (\text{On a } 2^{10} = 1024)$$

