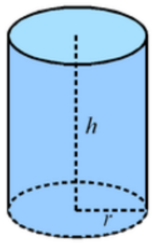
Fonctions de référence - Activités

Activité 1 : Le but de cette activité est de comparer le volume de deux types de récipients cylindriques :

Récipient 1 : On fixe le rayon r à $4\ cm$ et on fait varier la hauteur h (en cm) du récipient.



Récipient 2 : On fixe la hauteur h à $8\ cm$ et on fait varier le rayon r (en cm) du récipient.

On rappelle que $1\ cL = 10\ cm^3$ et que le volume du cylindre est donné par la formule :

$$Volume = hauteur \times \pi \times rayon^2$$

1) a. Exprimer en fonction de la hauteur h, le volume $V_1(h)$ du 1er récipient.

b. De quel type de fonction il s'agit ? Quelle sera sa courbe représentative ?

c. Compléter le tableau de valeur suivant (on arrondira au cL près) :

h (en cm)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$V_1(h)$ (en cL)							

d. Tracer en bleu la courbe représentative de la fonction V_1 dans le repère ci-dessous.

2) a. Exprimer en fonction du rayon r, le volume $V_2(r)$ du 2e récipient.

b. Cette fonction est-elle une fonction linéaire ? affine ?

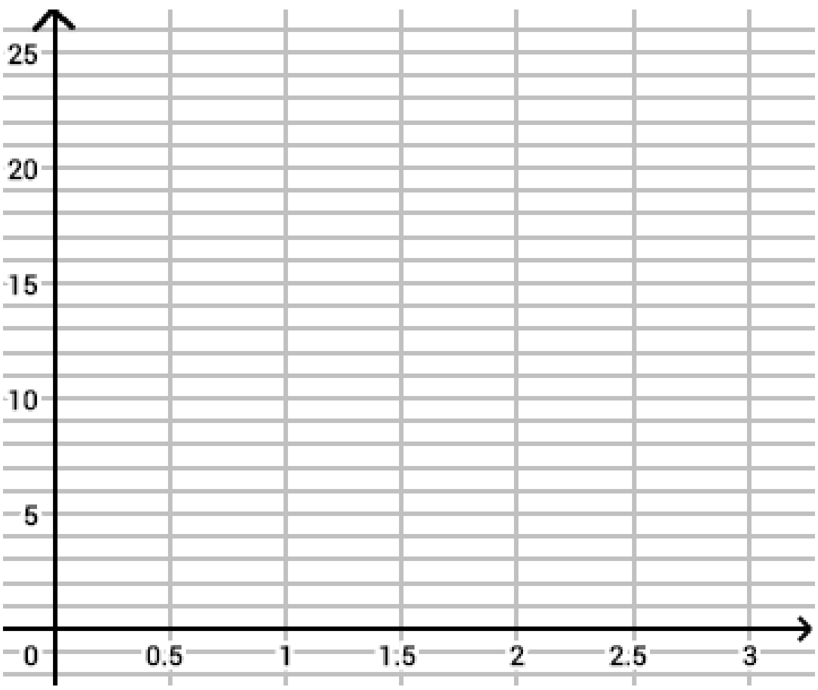
c. Compléter le tableau de valeur suivant (on arrondira au cL près) :

r (en cm)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$V_2(h)$ (en cL)							

d. Tracer en rouge la courbe représentative de la fonction V_2 dans le même repère que V_1.

3) a. Déterminer graphiquement pour quelle(s) dimension(s) les deux récipients ont la même contenance.

b. Retrouver ces résultats par le calcul



Activité 2 : Combien de temps faudra-t-il à tel objet pour parcourir 1 km ?

1) a. Rappeler la formule qui de relie la *vitesse*, la *distance* et le *temps*.

b. A chaque vitesse v en km/h, on associe le temps T qu'il faut pour parcourir 1 km. On définit ainsi une fonction $v \to T$. Donner une expression de $T(v)$ en fonction de v.

2) Compléter le tableau suivant :

Objet ou Animal	**Vitesse de parcours**	**Temps pour parcourir 1 km**
Escargot	$0{,}047\ km/h$	
Tortue		$4\ h$
Piéton	$3\ km/h$	
Cycliste		$3\ min$
Usain Bolt	$45\ km/h$	
Automobile	$90\ km/h$	
Léopard	$120\ km/h$	
TGV		$12\ s$
Son	$340\ m/s$	
Lumière		$\cong 3 \times 10^{-6}\ s$

3) On a représenté ci-contre la courbe de la fonction T en utilisant trois échelles différentes pour le temps. Placer sur ces courbes, les différents objets du tableau en choisissant l'échelle la plus appropriée.

4) Déterminer graphiquement :

a. Le temps mis par un avion pour parcourir 1 km sachant qu'il vole à $1000\ km/h$

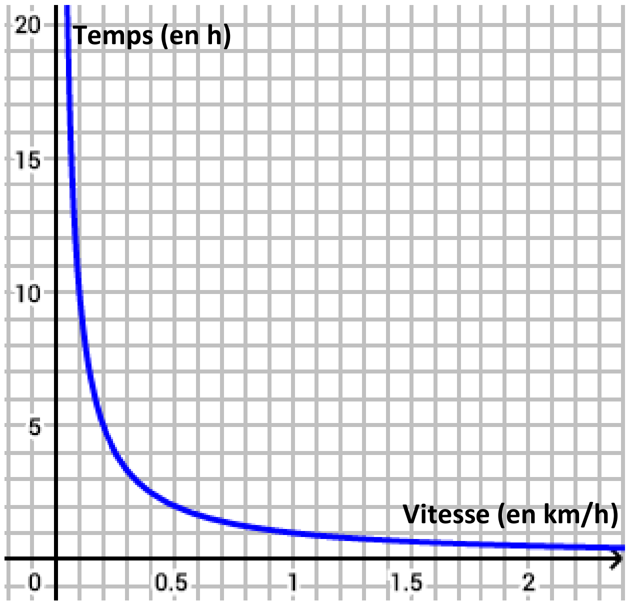
b. La vitesse d'un cheval qui a mis $1\ min$ à parcourir $1\ km$.

5) a. Un automobiliste roule à $150km/h$ au lieu de $130km/h$ qui est la vitesse maximale autorisée. Quel temps va-t-il gagner sur un trajet de $100km$.

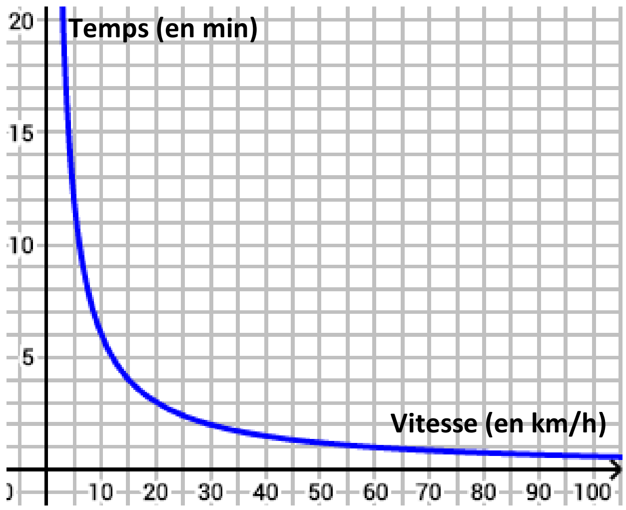
b. Même question avec une vitesse de $110km$ au lieu de $90km$.

c. Comparer les deux résultats.

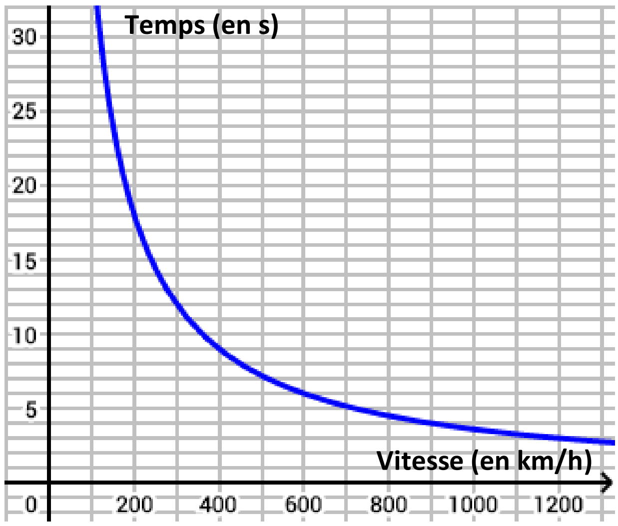
Courbe 1 : Echelle du temps en heure



Courbe 2 : Echelle du temps en minute



Courbe 3 : Echelle du temps en seconde



Fonctions de référence - Cours

1 – Fonction carré

a. Définition & Courbe représentative

Définition 1 : La fonction carré est la fonction qui à chaque nombre réel x associe son carré x^2.

Exemple 1 :

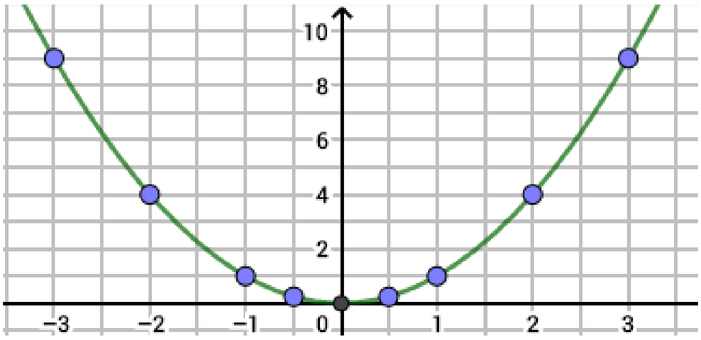
• L'image de 5 est $5^2 = 25$; L'image de -2 est $(-2)^2 = 4$; L'image de $\frac{1}{2}$ est $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

• Les antécédents de 144 sont 12 et -12 ; Les antécédents de 7 sont $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$; -1 n'a pas d'antécédents.

Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Courbe représentative :

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0.25	0	0.25	1	4	9



Propriété 1 : La fonction carré est **paire** : Pour tout réel x, on a $f(-x) = f(x)$.

Propriété 2 : La courbe représentative de la fonction carré est une **parabole** centrée en l'origine du repère.

Elle est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Sens de variation, Extremums et signe

Propriété 3 :

• La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty; 0[$ puis **croissante** sur $[0; +\infty[$.

• La fonction carré admet un **minimum** en 0 qui vaut 0 et pas de maximum.

• La fonction carré est toujours **positive** : Pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

c. Equation du type $x^2 = a$

Propriété 4 : L'équation $x^2 = a$ admet :

• Si $a > 0$: 2 solutions distinctes qui sont $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$

• Si $a = 0$: 1 solution unique qui est $x = 0$

• Si $a < 0$: Aucune solution

Exemple 2 : Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 1600$
$S = \{-40; 40\}$

b. $x^2 = 8$
$S = \{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$

c. $x^2 = 0$
$S = \{0\}$

d. $x^2 = -0.25$
$S = \emptyset$

2 – Fonction inverse

a. Définition & Courbe représentative

Définition 2 : La fonction inverse est la fonction qui à chaque nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$.

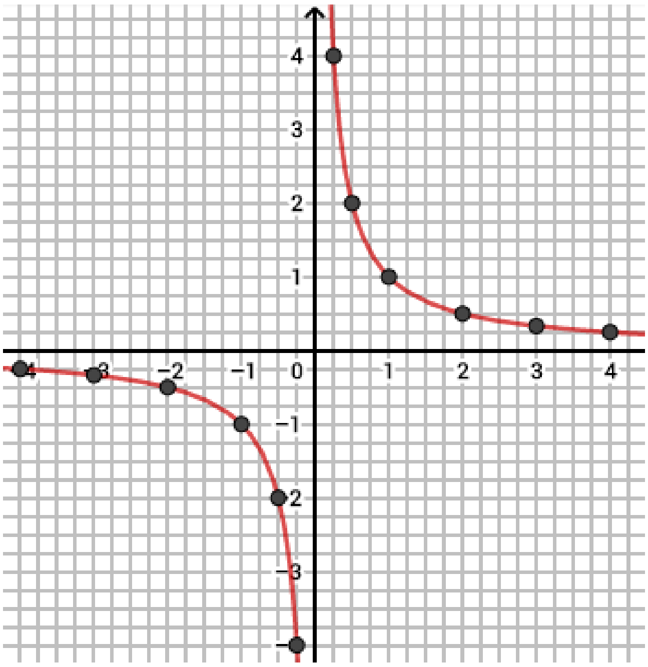
Exemple 3 :

- L'image de 2 est $\frac{1}{2}$; L'image de -3 est $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$; L'image de $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$; L'image de 0.01 est $\frac{1}{0.01} = 100$
- L'antécédent de $\frac{1}{2}$ est 2 ; $4 = \frac{1}{\frac{1}{4}}$ donc l'antécédent de 4 est $\frac{1}{4}$; $0.1 = \frac{1}{10}$ donc l'antédédent de 0.1 est 10
- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse car on ne peut pas diviser par « 0 ».

Ensemble de définition : $\mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Courbe représentative :

x	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	-0.25	0	0.25	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$	-0.25	-0.33	-0.5	-1	-2	-4	$\|\|$	4	2	1	0.5	0.33	0.25



Propriété 5 : La fonction carré est **impaire** : Pour tout réel x non nul, on a $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 6 : La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole.**

Elle est **symétrique** par rapport à l'origine du repère.

b. Sens de variation, Extremums et signe

Propriété 6 :

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty; 0[$ puis sur $]0; +\infty[$.
- La fonction inverse n'admet ni de maximum, ni de minimum.
- Un nombre non nul et son inverse ont toujours le même signe.

Tableau de variation :

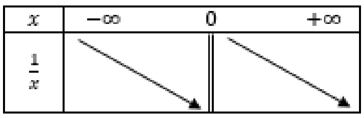


Tableau de signe :

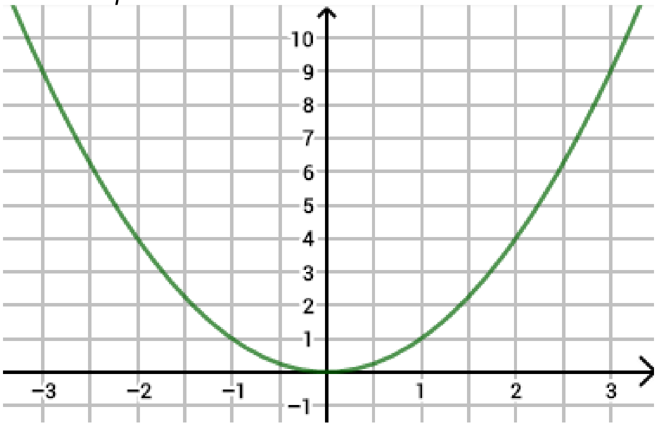
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	$\|\|$	$+$	

Remarque : La « double barre » signifie que 0 est une **valeur interdite**.

Fonctions de référence - Exercices

Fonction carré

Pour les exercices de 1 à 9 on pourra s'aider de la courbe représentative de la fonction carré ci-dessous.



1 (Image 1)

Quelle est l'image des nombres suivants par la fonction carré (On donnera des valeurs exactes) ?

$$0\ ;\ -1\ ;\ 12\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 10^5\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 5\sqrt{5}$$

2 (Image 2)

Déterminer l'image par la fonction carré des nombres suivants (On donnera le résultat avec l'écriture scientifique) :

a. 2×10^5 b. -1.2×10^4
c. 2.5×10^{-3} d. 9×10^{10}

3 (Image 3)

Déterminer l'image des nombres suivants par la fonction carré (On donnera des valeurs exactes) :

a. $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ b. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$
c. $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ d. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4 (Antécédents)

Déterminer le(s) antécédent(s) des nombres suivants par la fonction carré (On donnera des valeurs exactes) :

$$81\ ;\ -5\ ;\ 10000\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{36}\ ;\ \frac{16}{9}\ ;\ 0.25\ ;10^8 ;\ 4 \times 10^{10}$$

5 (Lecture graphique)

Lire graphiquement une approximation de $\sqrt{6}$.

6 (Equations)

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 9$ b. $x^2 = 100$
c. $x^2 = 20$ c. $x^2 = 50$
d. $x^2 = -25$ e. $x^2 = 0$

7 (Inéquation)

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2 \leq 4$ b. $x^2 > 1$
c. $x^2 < 5$ d. $x^2 \geq 3$
e. $x^2 \geq 0$ f. $x^2 < -1$

8 (Comparaison)

Sans utiliser la calculatrice comparer les nombres suivants :

a. 5.124^2 et 5.4^2 b. $(-0,5)^2$ et $(-0.47)^2$
c. $(-\pi)^2$ et $(-3.14)^2$ d. $\left(\frac{24}{7}\right)^2$ et $\left(\frac{10}{3}\right)^2$
e. $(\sqrt{3}-1)^2$ et $(\sqrt{3}+1)^2$

9 (Inégalités à compléter)

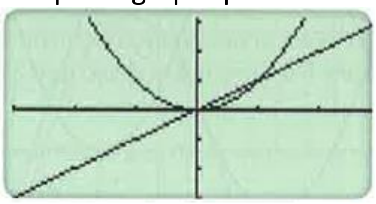
1) Compléter les inégalités suivantes :
   a. Si $\boldsymbol{x \geq 2\sqrt{2}}$ alors $\boldsymbol{x^2}$..........
   b. Si $\boldsymbol{x \leq -0.5}$ alors $\boldsymbol{x^2}$..........
   c. Si $x < -\frac{5}{4}$ alors x^2..........
2) Compléter les inégalités suivantes :
   a. Si $\boldsymbol{1 \leq x \leq 3}$ alors …… $\leq \boldsymbol{x^2} \leq$ …….
   b. Si $\boldsymbol{-2 \leq x \leq -1}$ alors …… $\leq \boldsymbol{x^2} \leq$ …….
   c. Si $\boldsymbol{-3 \leq x \leq 2}$ alors …… $\leq \boldsymbol{x^2} \leq$ …….

10 (Comparer mentalement)

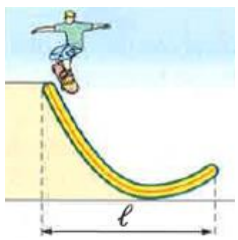
1) On pose $a = 11$ et $b = 8\sqrt{2}$. Calculer mentalement a^2 et b^2 puis en déduire quel est le plus grand nombre entre a et b.
2) Même question avec $a = 2\sqrt{13}$ et $b = 3\sqrt{7}$.

11 (Comparaison d'un nombre et de son carré)

1) Existe-t-il un nombre égal à son carré ?
2) On a tracé sur la calculatrice les courbes de la fonction identité ($f(x) = x$) et de la fonction carré. Comparer graphiquement x et x^2



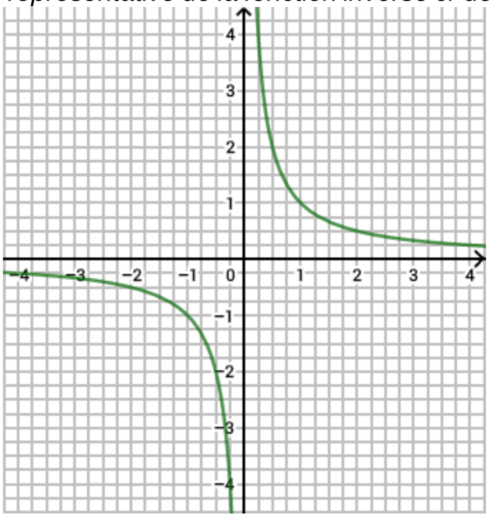
12 (Tremplin)



Ce tremplin a la forme de la parabole de la fonction carré (L'unité est le mètre). Il est haut de $0.5m$ d'un côté et de $2m$ de l'autre. Calculer sa largeur l en mètres (arrondi au cm) près.

Fonction inverse

Pour les exercices de 13 à 20 on pourra s'aider de la courbe représentative de la fonction inverse ci-dessous.



13 (Image)

Déterminer l'image des nombres suivants par la fonction inverse (On donnera des valeurs exactes) :

$4\ ;-1\ ;\frac{1}{9}\ ;\frac{3}{2}\ ;\ 0.2\ ;0.01\ ;-0.75\ ;10^5\ ;10^{-3}\ ;\frac{\sqrt{2}}{2}$

14 (Antécédents)

Déterminer le(s) antécédent(s) des nombres suivants par la fonction inverse (On donnera des valeurs exactes) :

$\frac{1}{6}\ ;-\frac{1}{7};3\ ;-2\ ;0\ ;0.4\ ;1.5\ ;-1.2\ ;0.001\ ;10^{-8}$

15 (Involution)

Démontrer que pour tout nombre réel $x \neq 0$, la fonction inverse $f(x)=\frac{1}{x}$ vérifie $f\big(f(x)\big)=x$.

16 (Equations)

Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{x}=-\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{x}=2$ c. $\frac{1}{x}=-3$

17 (Inéquation)

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{1}{x}\geq 1$ b. $\frac{1}{x}<-2$

c. $\frac{1}{x}>\frac{3}{4}$ d. $\frac{1}{x}\leq 2$

18 (Inéquation)

Résoudre les équations suivantes :

a. $0.5\leq\frac{1}{x}\leq 2$ b. $-3\leq\frac{1}{x}\leq -1$

c. $0\leq\frac{1}{x}\leq 4$ d $-1\leq\frac{1}{x}\leq 1$

19 (Comparaison)

Comparer mentalement les nombres suivants :

a. $\frac{1}{3.89}$ et $\frac{1}{3.9}$ b. $\frac{1}{-2.3}$ et $\frac{1}{-2.4}$

c. $-\frac{1}{538}$ et $-\frac{1}{539}$ d. $\frac{10}{31}$ et $\frac{1}{\pi}$

20 (Inégalités à compléter)

1) Compléter les inégalités suivantes :

a. Si $\boldsymbol{x}\geq 3$ alors $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$..........

b. Si $\boldsymbol{x}\leq\mathbf{-0.5}$ alors $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$..........

c. Si $x>\frac{9}{4}$ alors $\frac{1}{x}$..........

3) Compléter les inégalités suivantes :

a. Si $2\leq\boldsymbol{x}\leq\mathbf{3}$ alors ......$\leq\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\leq$.......

b. Si $-3\leq\boldsymbol{x}\leq\mathbf{-1}$ alors ......$\leq\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\leq$.......

c. Si $0.25\leq\boldsymbol{x}\leq 0.75$ alors ......$\leq\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\leq$.......

21 (Piston)

A l'intérieur d'un piston, la pression P, en bars, et le volume V, en litres, suivent la loi : $P\times V=1$

1) Expliquer pourquoi cette loi est liée à la fonction inverse

2) A l'intérieur du piston, le volume peut varier entre 0.5 et 5 litres. Quelles sont les valeurs possibles pour la pression ?

22 (Vitesse)

La distance entre le domicile de Lisa et son travail est de 60 km. Suivant les jours, elle met entre $1\,h\,15$ et $1\,h\,30$ pour effectuer le déplacement. On note t (en h) la durée du trajet et v (en km/h) la vitesse moyenne de Lisa sur ce parcours.

1) Exprimer v en fonction de t

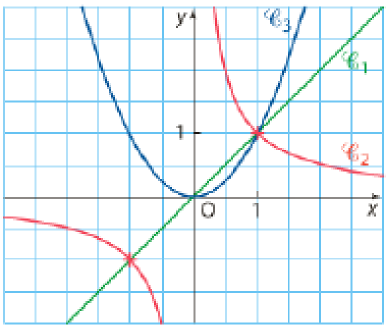
2) Donner un encadrement de t en heures

3) En déduire un encadrement de v

23 (Rangement)

On a tracé les fonctions suivantes :

- $f(x)=x^2$
- $g(x)=x$
- $h(x)=\frac{1}{x}$



1) Attribuer la bonne courbe à chacune des fonctions.

2) On souhaite ranger dans l'ordre croissant les nombres x, x^2 et $\frac{1}{x}$. Compléter le tableau suivant :

	Rangement
1er cas : $x\leqslant -1$	… ⩽ … ⩽ …
2e cas : $-1\leqslant x<0$	$\frac{1}{x}\leqslant x\leqslant x^2$
3e cas : …	… ⩽ … ⩽ …
4e cas : …	… ⩽ … ⩽ …