

Fonctions affines - Activités

Activité 1 : Avec Geogebra

- 1) a. Créer deux curseurs a et b , de type « nombre » variant entre -5 et 5 par pas de 0.1
 b. A l'aide de la fenêtre de saisie, tracer la représentation graphique de la fonction $f(x) = ax + b$
 c. Faire varier les curseurs a et b .
- 2) a. Quel est la forme de la représentation graphique de f ?
 b. Que se passe-t-il lorsque $a = 0$?
 c. Que se passe-t-il lorsque $b = 0$?
 d. Quelles types de droites ne peuvent être la représentation graphique de f ?
- 3) a. Quelles sont les coordonnées du point A d'intersection entre la représentation graphique de f et l'axe des ordonnées ? Placer ce point sur Geogebra.
 b. Placer maintenant le point de coordonnées $B(-\frac{b}{a}; 0)$. Que remarque-t-on ?
- 4) Etude de deux cas particuliers

$$f(x) = 3x - 6$$

$$g(x) = -4x + 4$$

- a. Positionner les curseurs pour tracer f
- b. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

Que remarque-t-on ?

- c. Quel est le sens de variation de f ?
- d. Compléter le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	\dots	$+\infty$
$f(x)$		0	

- a. Positionner les curseurs pour tracer g
- b. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$							

Que remarque-t-on ?

- c. Quel est le sens de variation de g ?
- d. Compléter le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	\dots	$+\infty$
$g(x)$		0	

Activité 2 : La fonction Recette.

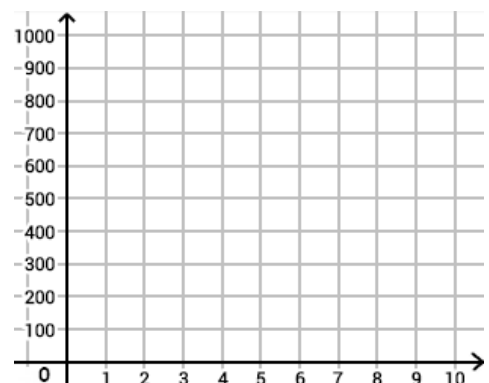
Une entreprise fabrique et vend des imprimantes. Le prix de commercialisation est de 80€ l'unité.

On note $R(x)$ la recette réalisé par l'entreprise pour x imprimantes vendus.

- 1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	10	100	200	500
$R(x)$								

- 2) Que remarque-t-on ?
- 3) a. Exprimer $R(x)$ en fonction de x .
 b. De quel type de fonction s'agit-il ?
- 4) Tracer la fonction f dans le repère ci-contre.



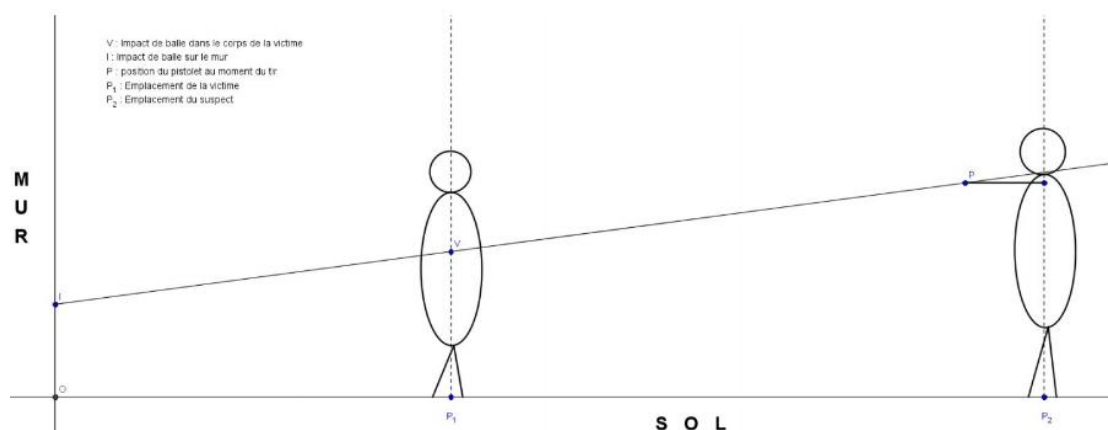
Activité 3 : Scène de crime

Un meurtre a été commis dans un hangar près de la gare de La Rochelle. Le principal suspect dans cette affaire est un homme âgé de 45 ans mesurant 1m65 et qui a été retrouvé en possession de l'arme.

Les indices suivants ont été relevés sur la scène de crime :

- La victime se trouvait debout au point P_1 à 3 m du mur (tâches de sang).
- Le suspect se trouvait debout au point P_2 à 7.5 m du mur (traces de poudre)
- L'impact de la balle a été retrouvé dans le mur au point I à 70 cm du sol.
- La victime a été touché à l'abdomen à une hauteur de 1.1m.

Sur une courte distance, la trajectoire d'une balle peut s'assimiler à une droite. De plus on considère que le bras d'une personne mesure 60 cm.



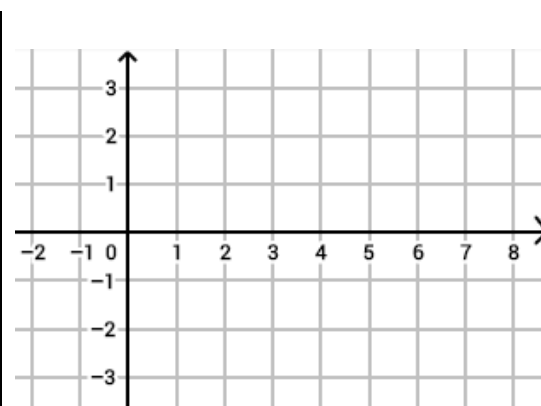
- 1) Reporter toutes ces indications sur la figure.
- 2) a. Justifier que la trajectoire de la balle peut être modélisée par une fonction de la forme $f(x) = ax + b$
b. Calculer la valeur de a .
c. Déterminer la valeur de b .
- 3) a. En déduire la hauteur du point P à laquelle le coup a été tiré.
b. Que peut-on en déduire par rapport au suspect principal ?
- 4) La balle a traversé le mur, et a continué sur la même trajectoire.
A quelle distance du mur a-t-elle touché le sol ?

Activité 4 : Fonction affine par morceaux

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 8]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ f(x) = 3 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ f(x) = -x + 7 & \text{si } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

- 1) Déterminer les images des nombres : 0 ; 3,5 et 5 par f .
- 2) Ecrire un algorithme qui demande de saisir un nombre et qui calcule l'image de ce nombre par la fonction f .
- 3) Dans le repère ci-contre tracer la courbe de la fonction f .
- 4) Réaliser le tableau de variation de la fonction f



Fonctions affines - Cours

1 – Généralités

Définition 1 : On appelle **fonction affine** toute fonction f définie sur \mathbb{R} qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

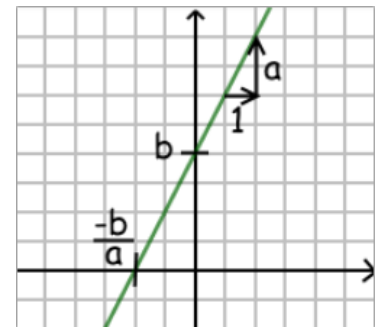
Cas particuliers :

- Si $b = 0$, c'est-à-dire $f(x) = ax$, on dit que f est une fonction **linéaire**.
- Si $a = 0$, c'est-à-dire $f(x) = b$, on dit que f est une fonction **constante**.

Théorème 1 : Dans un repère la courbe représentative d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite**. Cette droite a pour équation $y = ax + b$.

Interprétation graphique :

- a est appelée le coefficient directeur. Il correspond à la pente de la droite qui représente f .
- b est appelée l'ordonnée à l'origine. La droite coupe l'axe des ordonnées en b . C'est l'image de 0 par f .
- La droite coupe l'axe des abscisses en $-\frac{b}{a}$. C'est l'antécédent de 0 par f .



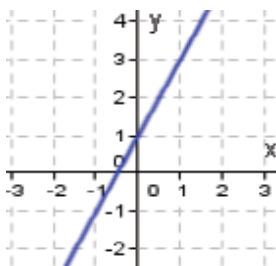
Remarque : On a (d) est la courbe représentative d'une fonction affine $\Rightarrow (d)$ est une droite. La réciproque est fautive car les droites verticales d'équation $x = c$ ne définissent pas des fonctions.

Exemple 1 :

1) $f(x) = 2x + 1$

$a = 2$ et $b = 1$

f est une fonction affine

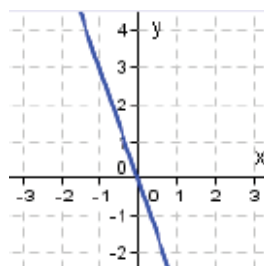


La courbe de f est une droite

2) $g(x) = -3x$

$a = -3$ et $b = 0$

g est une fonction linéaire

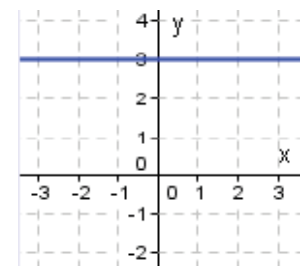


La droite passe par l'origine

3) $h(x) = 3$

$a = 0$ et $b = 3$

h est une fonction constante



La droite est horizontale

Contre-Exemple : $f(x) = x^2 + 1$ n'est pas une fonction affine. Sa courbe n'est pas une droite.

Exemple 2 : Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions affines ?

1) $f(x) = \frac{x+3}{2}$: On a $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oui, $a = 0.5$ et $b = 1.5$

2) $g(x) = x^2 - (x+2)^2$: On a $g(x) = (x+2-x)(x+2+x) = 2(2x+2) = 4x+4$. Oui, $a = b = 4$

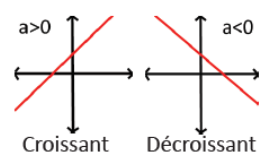
3) $h(x) = \frac{1}{x} + 5$: Non car la variable « x » est au dénominateur.



2 – Sens de variation et signe d'une fonction affine

Propriété 1 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$

- Si $a > 0$ alors f est croissante sur \mathbb{R} .
- Si $a < 0$ alors f est décroissante sur \mathbb{R} .



Exemple 2 : $f(x) = 2x + 1$ est croissante et $g(x) = -3x$ est décroissante.

Propriété 2 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$

• f s'annule en $-\frac{b}{a}$.

• Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

• Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Démonstration : Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ donc f s'annule en $-\frac{b}{a}$.
- Si $a > 0$, alors comme f est croissante, elle est d'abord négative puis positive.
- Si $a < 0$, alors comme f est décroissante, elle est d'abord positive puis négative.

Exemple 3 : Réaliser le tableau de signe des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x + 2$

x	$-\infty$	-0.5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

$$-\frac{b}{a} = -\frac{2}{4} = -0.5 \text{ et } a = 4 > 0$$

f est croissante donc d'abord « - » puis « + »

2) $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

x	$-\infty$	12	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

$$-\frac{b}{a} = \frac{-4}{-\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{1} = 12 \text{ et } a = -\frac{1}{3} < 0$$

g est décroissante donc d'abord « + » puis « - »

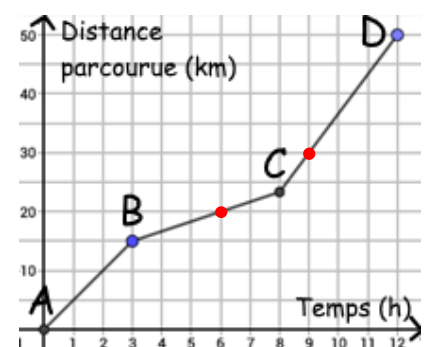
3 – Linéarité

Propriété 3 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$. Alors pour tout nombre réel u et v , on a :

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = a$$

Exemple 4 : Un randonneur marche pendant 12 h sur un parcours de 50 km divisé en 3 tronçons. Il marche à vitesse constante sur chacun des tronçons. On a représenté ci-contre la distance parcouru (en km) par le randonneur en fonction du temps (en h). Quelle est sa vitesse de marche sur chacun des tronçons ?

- $A \rightarrow B$: vitesse = $\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{15}{3} = 5 \text{ km/h}$
- $B \rightarrow C$: vitesse = $\frac{f(6)-f(3)}{6-3} = \frac{20-15}{6-3} = \frac{5}{3} \cong 2.7 \text{ km/h}$
- $C \rightarrow D$: vitesse = $\frac{f(12)-f(9)}{12-9} = \frac{50-30}{12-9} = \frac{20}{3} \cong 6.7 \text{ km/h}$



Fonctions affines - Exercices

Généralités

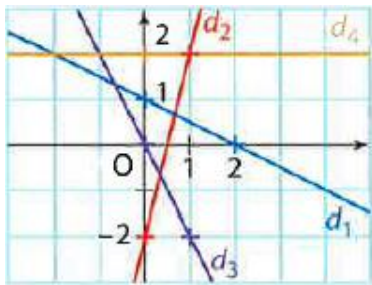
1 (Fonctions affines)

Démontrer que les fonctions suivantes sont affines

- $f(x) = \frac{2x+6}{3}$
- $f(x) = \frac{x+5}{2} - x$
- $f(x) = 2(3-x) - (4x-5)$
- $f(x) = (x+1)^2 - x^2$
- $f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2$
- $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x+4}{2} + x$

2 (Quatre droites)

Les quatre droites ci-dessous représentent quatre fonctions affines. Déterminer l'expression algébrique de chacune d'entre-elle puis préciser si la fonction est linéaire ou constante.



3 (Trois tableaux de valeurs)

Les trois tableaux ci-dessous sont des tableaux de valeurs d'une fonction affine. Retrouver l'expression algébrique de chaque fonction.

x	0	1	2	3	4
f(x)	-3	1	5	9	13

x	0	1	2	3	4
g(x)	0	-2	-4	-6	-8

x	0	1	2	3	4
h(x)	5	5	5	5	5

4 (Etude d'une fonction affine)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

- Justifier que f est une fonction affine.
- Déterminer l'image de 3 par f
 - Quel(s) sont les antécédent(s) de 3 par f ?
- Tracer la fonction f dans un repère.
- Quel est le sens de variation de f ?
 - En quelle valeur la fonction f s'annule-t-elle ?
 - Réaliser le tableau de signe de f .
- Reprendre les questions précédentes avec la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -2x - 3$

5 (Tableau de signe)

Déterminer le sens de variation puis réaliser le tableau de signe des fonctions affines suivantes :

- $f(x) = 3x + 2$
- $f(x) = -3x + 7$
- $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$
- $f(x) = -x + 2$
- $f(x) = \frac{3}{2} + x$
- $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$

6 (Tracer une droite 3)

Dans chacun des cas proposer une fonction affine qui admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Signe de $ax+b$	-	0	+

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	+	0	-

7 (Trouver une fonction affine)

Trouver la fonction affine f qui vérifie :

- $f(0) = 3$ et $f(1) = 0$
- $f(-4) = -1$ et $f(8) = 2$
- $f(1) = 3$ et $f(4) = 9$
- $f(1000) = 2010$ et $f(100) = 210$

8 (Affine ?)

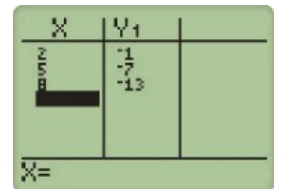
Les fonctions suivantes peuvent-elles être affines?

- $f(0) = 5 ; f(3) = 6$ et $f(6) = 7$
- $f(1.2) = 2.4 ; f(-2) = -4$ et $f(3) = 6$
- $f(8) = 13 ; f(13) = 21$ et $f(21) = 34$

x	-2	0	5
f(x)	3,1	-1,7	-5,2

9 (Calculatrice)

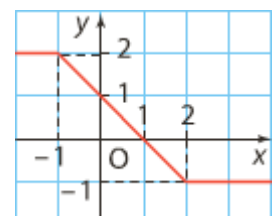
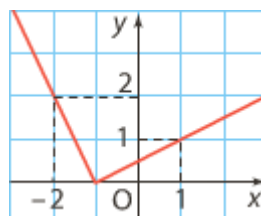
1) La fonction étudiée sur cette calculatrice peut-elle être affine ? Si oui, quelle est cette fonction ?



2) Quel nombre doit être saisi pour obtenir -57 dans la colonne $Y1$?

10 (Fonctions affines par morceaux)

Dans chacun des cas, déterminer les expressions algébriques de la fonction f définie par la courbe ci-dessous.



Problèmes

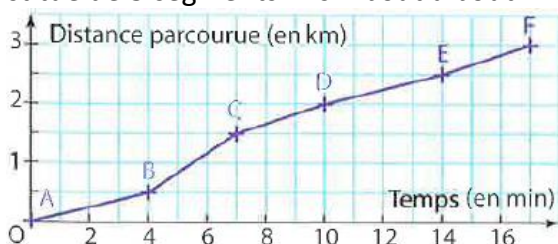
11 (Boulangerie)

Un boulanger fabrique chaque matin 100 croissants pour un total de 33€. Il vend ensuite ses croissants dans la journée 1,1€ pièce. On note x le nombre de croissants vendus par le boulanger.

- 1) Exprimer la recette $R(x)$, puis le bénéfice $B(x)$, réalisé par le boulanger en fonction de x
- 2) Réaliser le tableau de signe de $B(x)$.
- 3) Combien de croissant doivent-êre vendus pour que la production soit rentable ?

12 (Randonnée pédestre)

Une application d'un smartphone affiche à l'issue d'une course pédestre le graphique suivant constitué de 5 segments mis « bout à bout »



- 1) Déterminer la vitesse de marche sur le tronçon de A à B puis celui de C à D.
- 2) Ranger les vitesses de marches sur les cinq tronçons dans l'ordre croissant.

13 (Concessionnaire)

Un concessionnaire automobile propose à ses commerciaux deux types de rémunération.

Contrat A : Salaire mensuel fixe de 1100€ auquel s'ajoute 175€ par voiture vendue.

Contrat B : Salaire mensuel fixe de 1450€ auquel s'ajoute 125€ par voiture vendue.

Déterminer en fonction du nombre de ventes par mois, le contrat le plus avantageux.

14 (Radar)

Par arrêté du 4 Juin 2009, une marge d'erreur doit être déduite de la vitesse enregistrée sur un radar fixe. Sont déduits, lors d'un contrôle de vitesse :

- 5 km/h jusqu'à 100 km/h
- 5 % de la vitesse au-delà de 100 km/h

Soit la fonction f qui à la vitesse v enregistrée par le radar associe la vitesse $f(v)$ retenue.

- 1) Exprimer $f(v)$ en fonction de v
 - a. Pour $0 \leq v \leq 100$
 - b. Pour $v \geq 100$
- 2) Ecrire un algorithme qui prend en entrée la vitesse enregistrée par le radar et qui affiche la vitesse retenue, puis améliorer cette algorithme pour qu'il précise s'il y a infraction après avoir saisi la vitesse maximale autorisée.

15 (Diesel/Essence)

Hervé envisage d'acheter une voiture. Il hésite entre le modèle essence et le modèle diesel. Il consulte les données sur le site Internet du constructeur.

	Prix T.T.C.	Consommation
Modèle essence	20 300 €	5,3 L/100 km
Modèle diesel	23 250 €	3,5 L/100 km

Le coût total d'un véhicule est égal au montant correspondant à l'achat du véhicule auquel on ajoute les frais de consommation de carburant.

A ce jour, un litre d'essence SP 95 coûte 1,585€ et le prix d'un litre de diesel est de 1.310€.

On note x la distance parcourue en km ($x \geq 0$) avec un véhicule, $e(x)$ et $d(x)$ les frais de consommation de carburant en euros respectivement du modèle essence et du modèle diesel, pour x km parcourus.

- 1) Exprimer $e(x)$ et $d(x)$ en fonction de x
- 2) Donner des expressions algébriques des fonctions f qui à x associe le coût (en euros) du véhicule essence et g qui à x associe le coût (en euros) du véhicule diesel.
- 3) A partir de combien de kilomètres parcourus, la version diesel est-elle plus avantageuse ?

16 (Parking)

Un parking propose les tarifs suivants : 0.50€ la première demi-heure puis 0,01 € pour chaque minute supplémentaire.

- 1) Combien doit-on payer après 20min? 1h?
- 2) Ecrire un algorithme qui lit le temps de stationnement d'un automobiliste, et qui affiche le prix qu'il doit payer.
- 3) Soit t la durée (en min) de stationnement et $f(t)$ le prix à payer (en €) par l'automobiliste. A l'aide d'une fonction par morceau, exprimer $f(t)$ en fonction de t
- 4) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f .
Axe des abscisses : 1 carreau = 10 min
Axe des abscisses : 1 carreau = 0.20€
- 5) L'automobiliste a payé 1,6 €. Combien de temps est-il resté ?

17 (Température)

La température d'un liquide diminue progressivement. Elle était de 2.4°C à 12h et de 1.6° à 12h40. A quelle heure la température du liquide atteindra 0°C si elle continue à diminuer au même rythme ?

