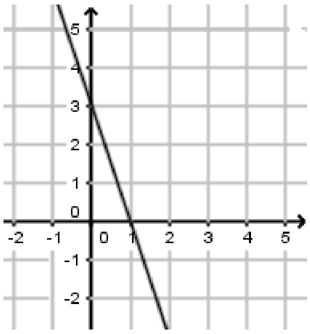
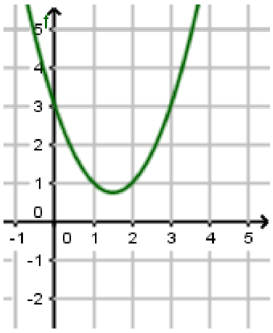
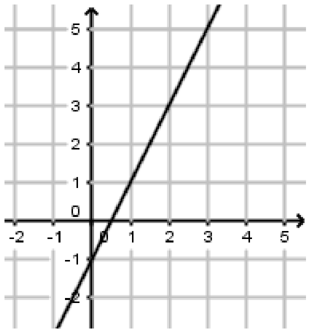
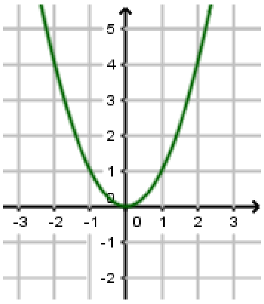
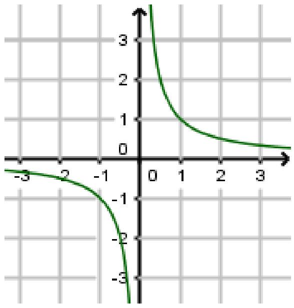
Chapitre 4 : Fonctions de référence

Activité 1 : On considère les 5 fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x - 1 \ ; \ g(x) = -3x + 3 \ ; \ h(x) = x^2 \ ; \ k(x) = \frac{1}{x} \text{ et } l(x) = x^2 - 3x + 3$$

1) Associer à chacune des fonctions sa courbe représentative.

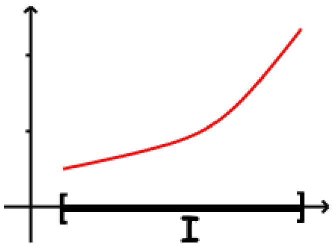






2) Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions.

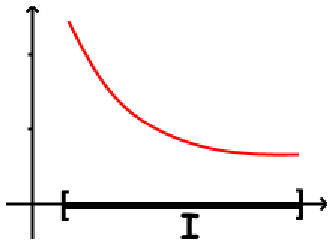
3) Déterminer le signe de chacune de ces fonctions.

Activité 2 : (Sens de variation)

1) Compléter les deux schémas ci-dessous de la façon suivante :



f est .... sur l'intervalle I



f est .... sur l'intervalle I

a. Indiquer le sens de variation de la fonction.

b. Choisir deux nombres quelconques a et b dans l'intervalle I tel que $a < b$.

c. Placer alors $f(a)$ et $f(b)$ puis comparer les.

2) Comparer les nombres suivants :

a. $f(0.01)$ et $f(0{,}001)$ b. $g(-1)$ et $g(-2)$ c. $3{,}14^2$ et π^2 d. $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$ et $(-0{,}01)^2$

e. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ f. $l(100)$ et $l(101)$ g. $l(0)$ et $l(1)$ h. $\frac{1}{(2-\sqrt{2})^2}$ et $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}$

1 – **Fonction cube**

Définition 1 : La fonction cube est la fonction qui à tout réel x associe son cube x^3

Exemple 1 :

● L'image de -2 par la fonction cube est …………………

● L'antécédent de 27 par la fonction cube est …………………

Activité 1 : (Etude de la fonction cube)

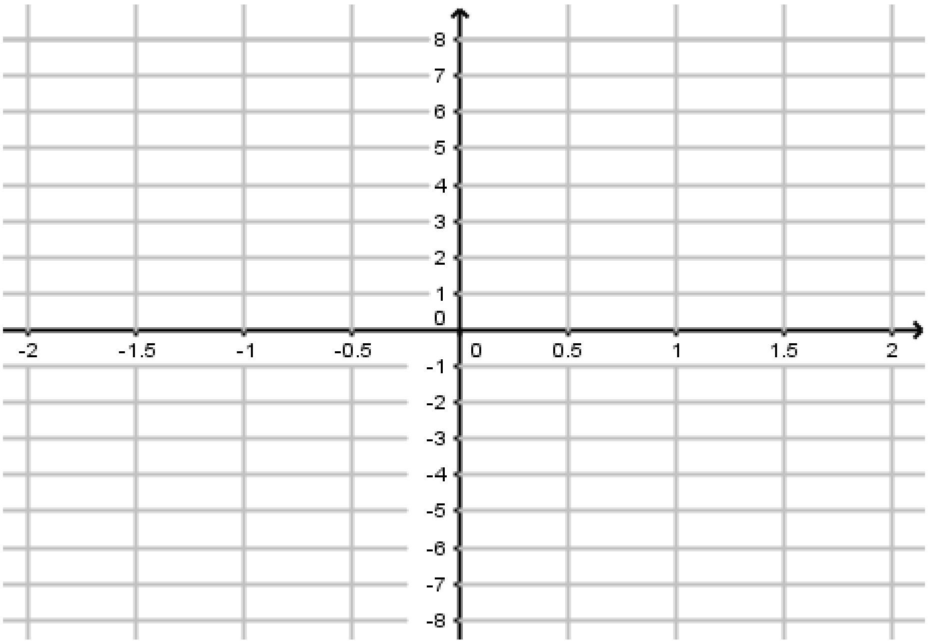
● Formule :

● Ensemble de définition :

● Tableau de valeurs :

x	-2	$-1{,}5$	1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$									

● Courbe représentative :



● Tableau de variation :

● Tableau de signe :

2 – Fonction racine carrée

Définition 2 : La fonction cube est la fonction qui à tout réel $x > 0$ associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.

Exemple 2 :

● L'image de 4 par la fonction racine carrée est ………………….

● L'antécédent de 4 par la fonction racine carré est ………………….

Activité 2 : (Etude de la fonction racine carré)

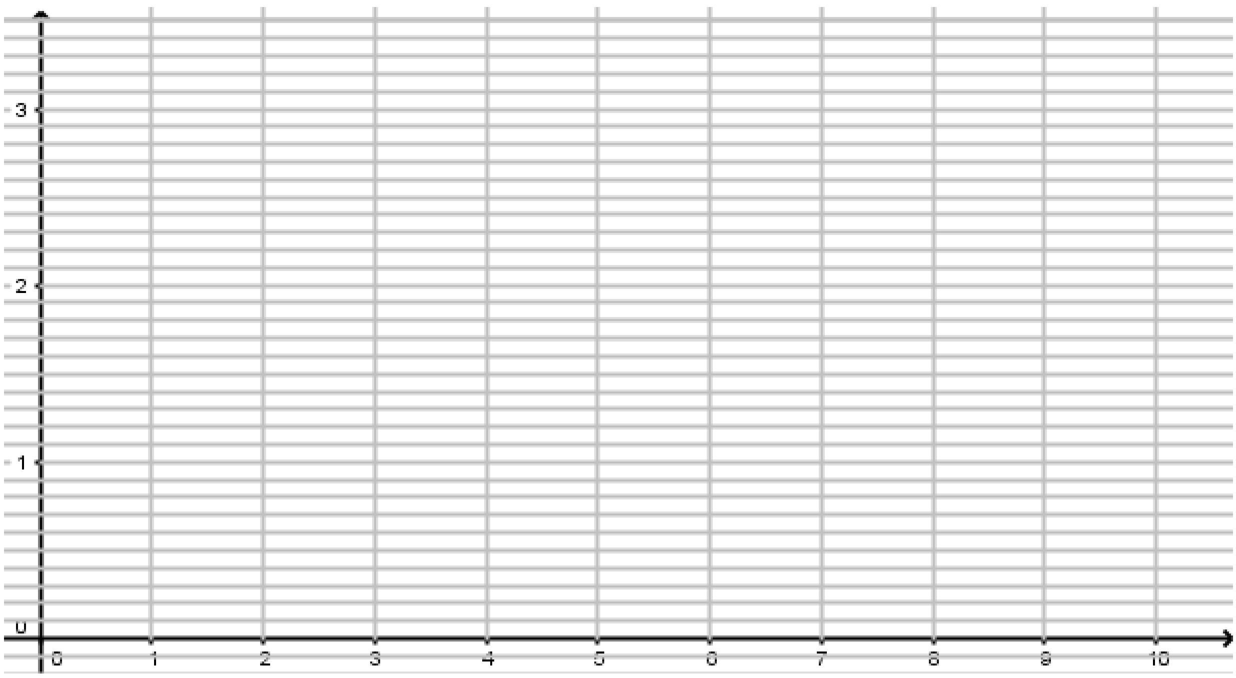
● Formule :

● Ensemble de définition :

● Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$											

● Courbe représentative :



● Tableau de variation :

● Tableau de signe :

Fonctions de référence – Exercices

Fonction cube

1 Calculer les images des nombres suivants par la fonction cube

a. $\frac{-2}{5}$ b. 10^2 c. $-0{,}02$ d. $-5\sqrt{5}$

2 Déterminer les antécédents des nombres suivants par la fonction cube

a. 27 b. 10^9 c. $-0{,}001$ d. $\frac{1}{8}$

3 A l'aide du graphique de la fonction cube résoudre graphiquement les équations suivantes :

a. $x^3 = -8$ b. $x^3 \geqslant 1$

c. $x^3 < 0$ d. $x^3 \geqslant -0{,}125$

4 En utilisant la fonction GRAPH de la calculatrice résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

a. $x^3 + x + 1 = 0$
b. $x^3 - 2x + 5 = 2$
c. $x^3 - 2x + 5 = 100$
d. $x^3 \leqslant -2x + 3$

5 Compléter les propositions suivantes :

a. Si $0{,}5 \leq x \leq 1$ alors … $\leq x^3 \leq$ …
b. Si $x \leq 0{,}3$ alors $x^3 \in$ …
c. Si $x \geq -0{,}5$ alors $x^3 \in$ …
d. Si $x \in [1{,}5; 3]$ alors $x^3 \in$ …

6 Comparer les nombres suivants :

a. $0{,}01^3$ et $0{,}007^3$
b. $(1-\sqrt{2})^3$ et $(1-\sqrt{3})^3$

Fonction racine carrée

7 Calculer si possible les images des nombres suivants par la fonction racine carrée

a. 144 b. 10^{12} c. $\frac{1}{9}$ d. -1

8 Simplifier les racines carrés suivantes :

a. $\sqrt{27}$ b. $\sqrt{60}$ c. $\sqrt{72}$ d. $\sqrt{\frac{98}{20}}$

9 Comparer les nombres suivants :

a. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt{\frac{1}{4}}$
b. $\sqrt{1{,}001}$ et $\sqrt{1{,}0001}$

10 Simplifier les racines des équations suivantes :

1) $x^2 - 6x - 5 = 0$

$x_1 = \frac{6-\sqrt{56}}{2}$; $x_2 = \frac{6+\sqrt{56}}{2}$

2) $-2x^2 + 4x + 2 = 0$

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{32}}{-4}$; $x_2 = \frac{-4+\sqrt{32}}{-4}$

3) $-x^2 + 10x - 3 = 0$

$x_1 = \frac{-10-\sqrt{88}}{-2}$; $x_2 = \frac{-10+\sqrt{88}}{-2}$

11 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{1-2x}$
2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
3) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
4) $k(x) = \sqrt{x^3}$

Problèmes

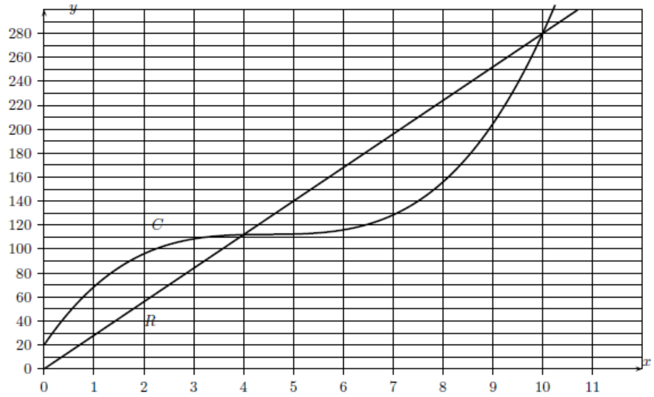
12 Le but de cet exercice est de discuter de l'affirmation suivante : « Le cube d'un nombre est toujours supérieur à lui-même ».

1) Que pensez-vous de cette affirmation ?
2) Méthode graphique
   a. Tracer sur la calculatrice dans un même repère, la fonction cube ainsi que la fonction identité puis déterminer la position relative des deux courbes.
   b. En déduire les solutions de l'inéquation $x^3 > x$.
3) Méthode algébrique
   Soit h la fonction définie par $h(x) = x^3 - x$.
   a. Factoriser $h(x)$.
   b. Réaliser le tableau de signe de h.
   c. Résoudre alors $h(x) > 0$, puis en déduire les solutions de l'inéquation $x^3 > x$.

13 Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n$.

1) Tracer f_n sur la calculatrice pour les premières valeurs de n.
2) Conjecturer le signe et les variations de $f_n(x)$ en fonction de la parité de n.
3) Même question avec la fonction g_n définie par $g_n(x) = \frac{1}{x^n}$.

14 Une entreprise produit et vend un objet en grandes quantités. On désigne par x le nombre d'objets vendus (en milliers), avec $x \in [0; 10{,}5]$. Chaque objet est vendu 28 euros. La recette (en milliers d'euros) est donnée par $R(x) = 28x$. Le coût total de fabrication (en milliers d'euros) est donnée par $C(x) = x^3 - 13,5x^2 + 61x + 20$. On a tracé les courbes de C et R ci-dessous.



A – **Etude graphique**

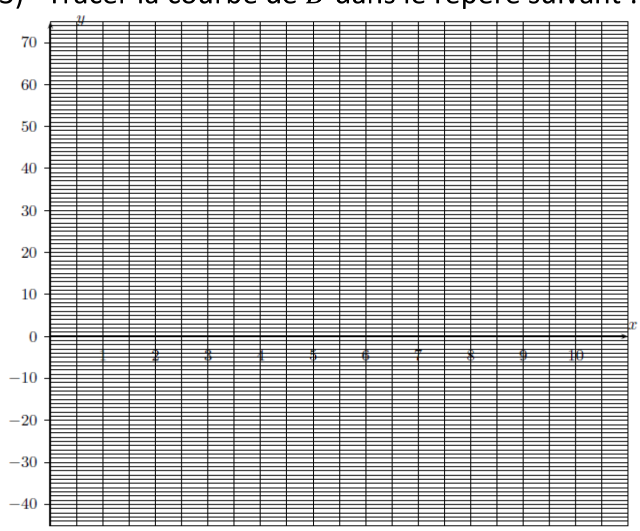
1) Estimer la valeur de la recette, du coût et du bénéfice pour une production de 1 milliers puis pour 5 milliers d'objets.
2) Déterminer graphiquement l'intervalle de rentabilité de la production, c'est-à-dire les nombres d'objets à fabriquer et à vendre pour que la production soit rentable.
3) Déterminer les nombres d'objets à fabriquer et à vendre pour que le bénéfice soit maximal et donner une approximation de ce bénéfice.

B – **Construction de la courbe du Bénéfice**

1) Montrer que le bénéfice est donné en fonction de x par $B(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 33x - 20$.
2) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous à 10^{-1} près.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5
$B(x)$																		

3) Tracer la courbe de B dans le repère suivant :



C – **Optimisation du Bénéfice**

1) Estimer graphiquement le tableau de variations de $B(x)$ sur $[0; 10{,}5]$
2) Estimer graphiquement les nombres d'objets à fabriquer et à vendre pour que le bénéfice soit maximal et donner une approximation de ce bénéfice maximal.
3) Comparer votre réponse avec celle de la première partie.

D – **Intervalle de rentabilité**

1) Estimer graphiquement le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0\ ;\ 10{,}5]$
2) A l'aide de la question précédente, retrouver alors l'intervalle de rentabilité de la production.
3) Nous allons maintenant déterminer l'intervalle de rentabilité par le calcul.
   a. Montrer que l'on a :
   $$B(x) = (-0,5x^2 + 7x - 20)(2x + 1)$$
   b. Compléter le tableau de signe suivant :

x	
$-0,5x^2 + 7x - 20$	
$2x + 1$	
$B(x)$	

   c. Résoudre l'inéquation $B(x) > 0$.
   d. Conclure