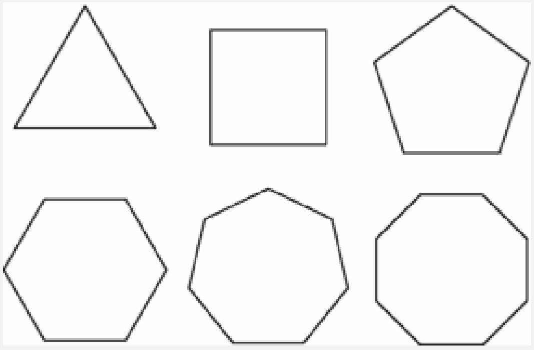
Chapitre 4 : Fonctions numériques - Activités

Activité 1 : Des fonctions sous plusieurs formes…

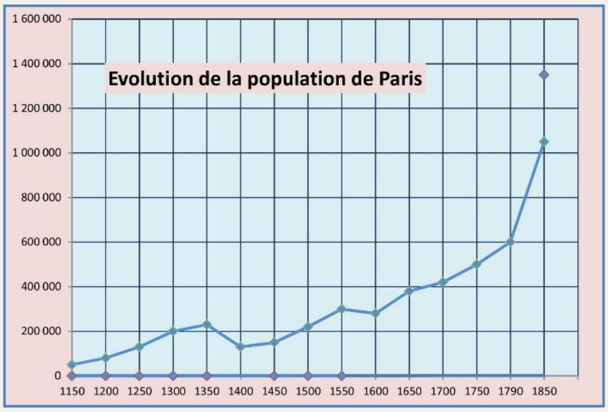
1) Soit $f(n)$ le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.



Compléter le tableau suivant :

n	3	4	5	6	…
$f(n)$					

2) La courbe ci-dessous représente l'évolution de la population de Paris entre 1150 et 1850.



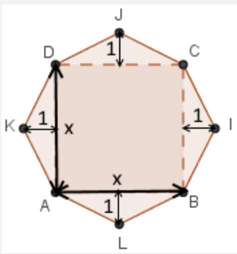
a. Quel était la population de Paris en 1790 ?

……………………………………………………………….

b. En quelle(s) année(s) la population de Paris était de 200 000 habitants ?

………………………………………………………………

3) Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré de côté x, surmonté de 4 triangles isocèles de hauteur 1. On obtient un octogone $ALBICJDK$.



Soit $A(x)$ l'aire totale de la figure.

a. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

b. Déterminer l'aire de la figure :

- lorsque $x = 2$: ……………………………………

- lorsque $x = 6$: ……………………………………

4) On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre
Lui ajouter 1.
Multiplier le résultat par 2.
Soustraire 3 au résultat
Afficher le résultat

a. Exécuter cet algorithme avec les nombres $3, -4, 0$ et $\frac{1}{3}$.

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

b. Peut-on choisir un nombre pour que s'affiche le nombre 0 ?

………………………………………………………………

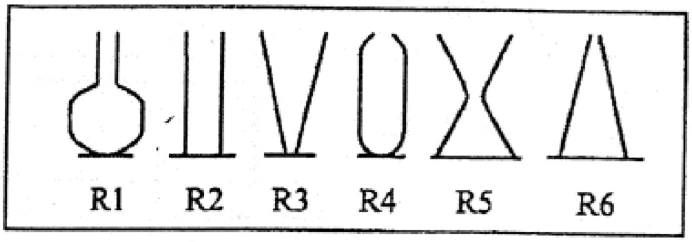
………………………………………………………………

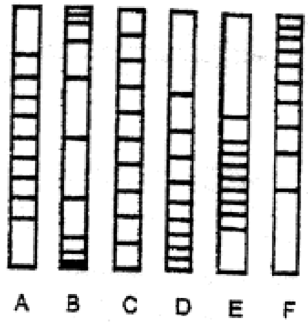
Activité 2 : Réservoirs

A la Cité des Sciences et de l'Industrie à Paris.

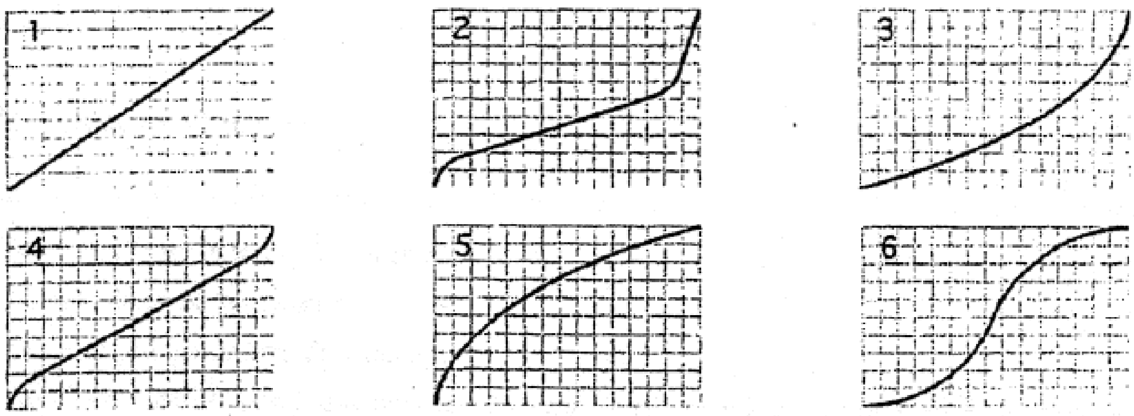
« Six réservoirs de formes différentes, de même volume, de même hauteur se remplissent dans le même temps. Il s'agit d'associer à une forme de récipient une jauge et une courbe indiquant la hauteur du liquide en fonction du temps. »

Les graduations des six jauges A, B, C... indiquent les hauteurs de liquide correspondant à 1 litre, 2 litres, 3 litres…pour les six réservoirs.
Les courbes 1, 2, 3... indiquent la hauteur atteinte par le liquide en fonction du temps lorsque les six réservoirs se remplissent.





Les récipients ont tous le même volume et la même hauteur. Leurs formes sont représentées grossièrement par les dessins ci-dessus.
Pendant le remplissage, le débit de l'eau est constant et identique d'un récipient à l'autre. Ainsi, à un instant donné, le volume d'eau contenu dans chaque récipient est le même mais la hauteur d'eau n'est pas nécessairement la même.
Associer à chaque récipient R1, R2, R3, R4, R5 et R6 la jauge puis la courbe qui lui correspond.



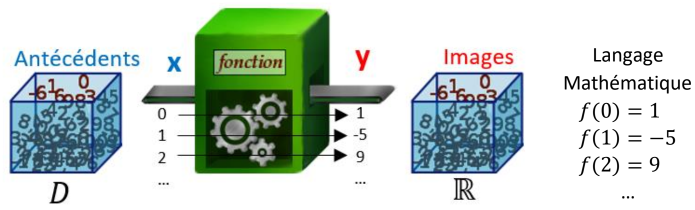
Chapitre 5 : Fonctions numériques

1 – La notion de fonction

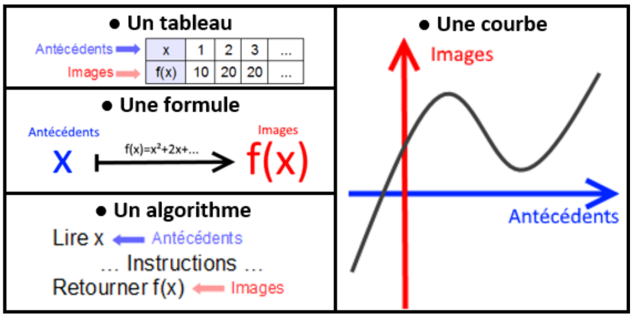
Définition 1 : Soit D un ensemble de nombres réels. On appelle **fonction** de D dans $\mathbb{R}$ un procédé mathématique permettant d'associer à **tout** réel x de D, un **unique** réel y, noté $f(x)$.

Vocabulaire :

- On dit que y est **l'image** de x.
- On dit que x est un **antécédent** de y.
- D est appelé **l'ensemble de définition.**



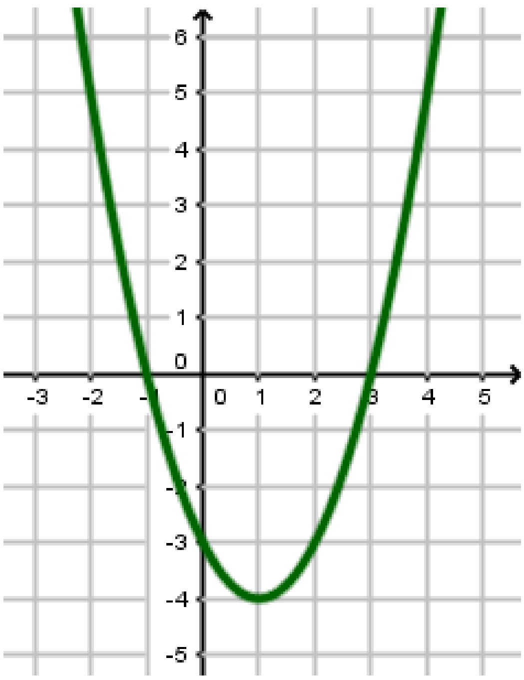
Elles peuvent se présenter sous plusieurs formes : Un **tableau**, une **formule**, une **courbe**, un **algorithme**.



Remarque :

- L'image d'un nombre est **unique**, mais un nombre peut avoir **un**, **plusieurs**, ou **aucun** antécédent(s).
- Lorsque l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas précisé, on convient qu'il s'agit de l'ensemble des nombres x tel que $f(x)$ **existe**.

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-contre.



1) Lire graphiquement l'image de 2 par f :

   L'image de 2 par f est -3

2) Déterminer graphiquement le(s) antécédent(s) par f

   a. Du nombre 5 : -2 *et* 4

   b. Du nombre -5 : *Aucun antécédent*

   c. Du nombre -4 : 1

3) Compléter les égalités suivantes :

   a. $f(4) =$ **5**

   b. $f(-1) =$ **0**

   c. $f(0) =$ **-3**

   d. $f(\mathbf{1}) = -4$

Méthode : Pour calculer l'image d'un nombre, on remplace x par ce nombre dans la formule de la fonction.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

1) Calculer l'image de 1 par f.
   $f(1) = 2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 5 = 2 + 3 + 5 = 10$. *L'image de* 1 *par* f *est* 10.
2) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
   $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} + 5 = 2 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 5 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 5 = 7$
3) Vérifier que -1.5 et un antécédent de 5 par f.
   $f(-1{,}5) = 2 \times (-1{,}5)^2 + 3 \times (-1.5) + 5 = 2 \times 2.25 - 4.5 + 5 = 4.5 - 4.5 + 5 = 5$
   Donc -1.5 *est un antécédent de* 5
4) Déterminer un autre antécédent de 5 par f.
   On a aussi, $f(0) = 2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 5 = 5$. *Donc* 0 *est un autre antécédent de* 5
5) Ecrire un algorithme permettant de calculer l'image d'un nombre par la fonction f.

Algorithme

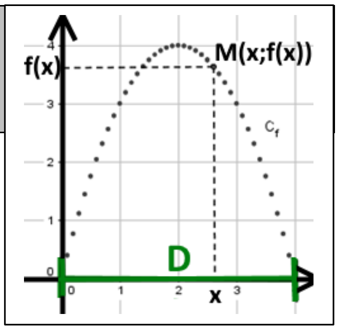
Variables : x ; y
Entrée :
  Saisir x
Traitement :
  $y \leftarrow 2x^2 + 3x + 5$
Sortie :
  Afficher y

Exécution

Calculons l'image de 1 :
$x = 1$
$y = 2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 5 = 10$
$<< 10 >>$

2 – Courbe représentative d'une fonction

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur D. La **courbe représentative** de f, notée C_f, est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ où $x \in D$.



Remarque :

- Un point M appartient donc à la courbe de f si et seulement si : $f(x_M) = y_M$.
- Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on utilise la calculatrice.

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 4$.

1) Réaliser un tableau de valeurs de f entre -2 et 4 par pas de 1.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	-1	-4	-6	-4	-1	4

2) Tracer dans le repère ci-contre la courbe représentative de f.
3) Les points suivants appartiennent-ils à la courbe de f ?

a. $A(10\ ;\ 76)$

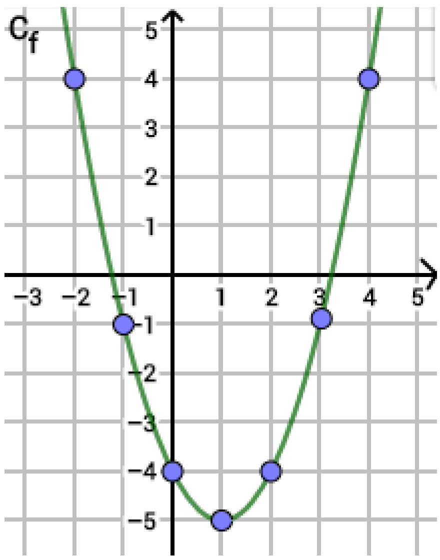
$f(x_A) = f(10)$
$= 10^2 - 2 \times 10 - 4$
$= 100 - 20 - 4$
$= 76 = y_A$

Donc $A \in C_f$

b. $B(0.5\ ;\ -4.5)$

$f(x_B) = f(0.5)$
$= 0.5^2 - 2 \times 0.5 - 4$
$= 0.25 - 1 - 4$
$= -4.75 = y_B$

Donc $B \notin C_f$



Fonctions numériques - Exercices

La notion de fonction

1 (Fonction… ou pas)

Parmi les processus suivants lesquels permettent de définir une fonction ?

1) On associe, à chaque altitude (en m), la pression relevée (en Hpa) ?
2) On associe à l'âge de chaque élève de la classe sa taille (en m).
3) On associe, au prix des logements vendu par une agence, la surface de ce logement.
4) On associe, au nombre d'objets produits, le coût de production pour l'entreprise.

2 (Fonction « Nombre de lettres »)

On considère la fonction f qui à chaque chiffre n associe le nombre de lettres qu'il contient.

1) Donner l'ensemble de définition de f
2) Compléter le tableau suivant :

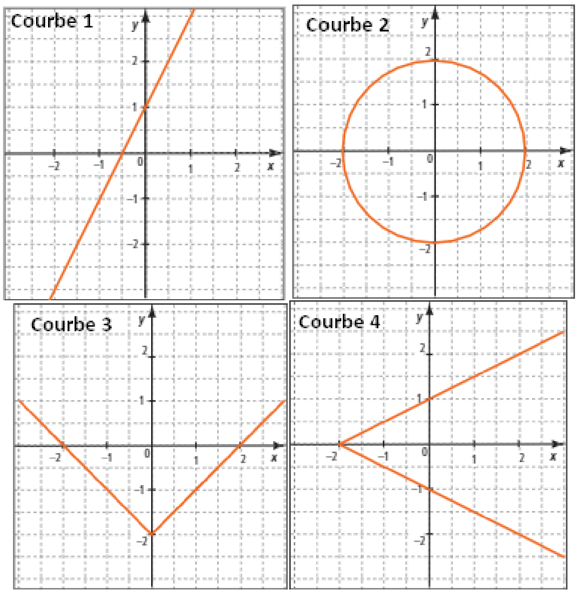
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$										

3) Quel est l'image de 4 ?
4) Quel(s) sont le(s) antécédents de 4 par f ?

Fonction définie par une courbe

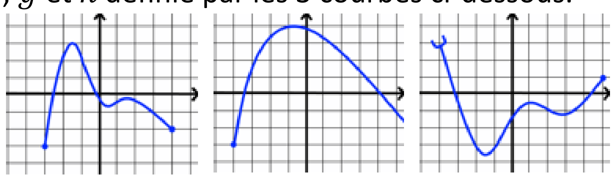
3 (Plusieurs courbes)

Ses courbes définissent-elles des fonctions ?



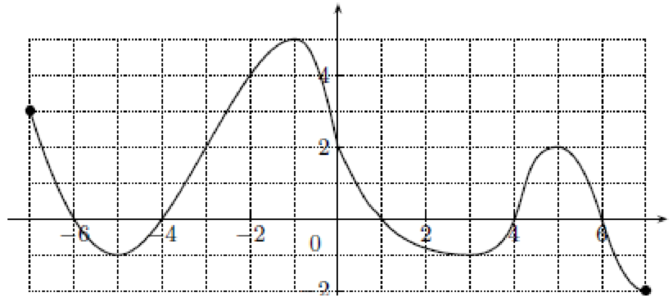
4 (Ensemble de définition)

Donner l'ensemble de définition des fonctions f, g et h définie par les 3 courbes ci-dessous.



5 (Fonction définie par une courbe)

Soit la fonction f définie par la courbe ci-dessous.



1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Déterminer l'image par f des nombres :
$-7\ ;0\ ;3\ ;6$
3) Compléter : $f(-2) =$ … et $f(\ldots) = -2$
4) Déterminer le(s) antécédent(s) par f de :
$0\ ;2\ ;6$
5) Quels sont les nombres possédant :
   a. exactement 1 antécédent par f.
   b. exactement 3 antécédents par f.

6 (Courbe possible)

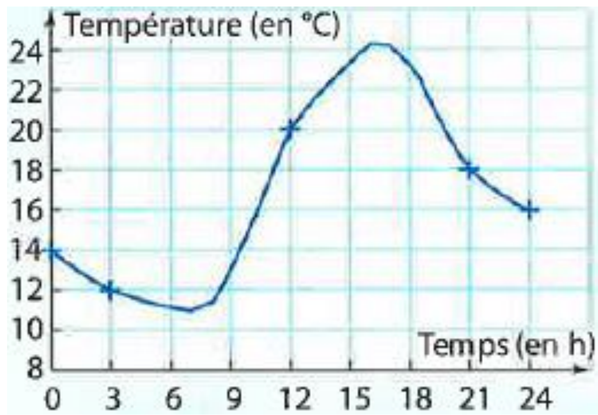
Soit C la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 6]$ tel que :

(1) $f(-1) = 3$ et $f(5) = 6$.
(2) L'image de 3 par f est 1.
(3) 2 est un antécédent de -1 par f.
(4) 0 admet exactement 2 antécédents par f.

Tracer une allure possible de la courbe C.

7 (Courbe de température)

Dans une station météorologique, on a relevé les températures sur une journée de $24\ h$. On a obtenu la courbe suivante :



1) Déterminer l'ensemble de définition de T.
2) A l'aide du vocabulaire des fonctions, préciser :
   a. La température qu'il faisait à 21 h
   b. A quelle(s) heure(s) il faisait 20°C

Fonctions définie par une formule

8 (Calcul d'image)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

1) Calculer l'image par f des nombres suivants :

$$-1\ ;\frac{2}{3};10^3\ ;1+\sqrt{2}$$

2) Vérifier que le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un antécédent de 0 par f.

9 (Programme de calcul 1)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par le programme de calcul suivant :

On choisit un nombre.
On lui ajoute 3.
On multiplie le résultat par 2.
On soustrait 5.
On met le résultat au carré.
On soustrait 4.

1) Déterminer mentalement l'image de 2 par f.
2) Déterminer mentalement le(s) antécédent(s) de 32 par f.
3) Déterminer la formule de la fonction f

10 (Programme de calcul 2)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-5}{3} + 1$$

1) Ecrire un programme de calcul, qui donne l'image d'un nombre par la fonction f.
2) Utiliser ce programme pour calculer
3) a. L'image des nombre 3 et 0.25 par f
   b. L'antécédent de 2 par f.
4) Vérifier les résultats précédents à l'aide de la formule.

11 (Fonction Produit infernal)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(x-\frac{1}{2018}\right)$$

1) Calculer l'image de 1.
2) Combien d'antécédents par f possède le nombre 0 ?

12 (Ensemble de définition)

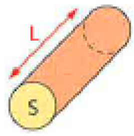
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$.

1) Que se passe-t-il lorsque l'on calcule l'image de 1 par f et par g ?
2) Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions.

13 (Fonction à 2 variables)

La résistance électrique, en ohms, d'un fil de cuivre est donnée par la fonction R tel que :

$$R(L;S) = 0.017\ \frac{L}{S}$$



où L est la longueur du fil (en m)
et S la section du fil (en mm^2)
Compléter le tableau suivant :

S \ L	40	80	120	160
2,5				
4		0,34		
16				

Courbe représentative d'une fonction

14 (Calculatrice)

On considère la fonction f définie sur $[-3;3]$ par

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

1) Réaliser un tableau de valeurs de f sur son intervalle de définition avec un pas de 1.
2) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de la fonction f.
3) Quel(s) sont les antécédent(s) de 0 par f ?
4) Le point $M(0.5;-5.625)$ appartient-il à la courbe de f

15 (Trajectoire d'un projectile)

Un canon tire un projectile dont la trajectoire est assimilable à la courbe de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) Tracer cette trajectoire.
2) Le canon atteindra-t-il sa cible située en $C(3.25;2.5)$?

16 (Distance d'arrêt)

La distance d'arrêt D (en m) d'un véhicule est fonction de sa vitesse (en km/h). On a :

$$D(v) = \frac{V}{3.6} + \frac{V^2}{254\times c}$$

où c est un coefficient de frottement qui vaut :
. $c = 0.8$ sur route sèche.
. $c = 0.4$ sur route mouillée.

1) Calculer la distance d'arrêt (sur route sèche et mouillé) d'un véhicule roulant à $50km/h$? à 90 km/h ?
2) Tracer sur votre calculatrice les courbes représentatives de la fonction donnant la distance en fonction de la distance sur route sèche et sur route mouillée.
3) En déduire, dans les 2 cas, la vitesse à ne pas dépasser pour s'arrêter en moins de 50 m.
4) Commenter cette phrase : «Plus la vitesse est élevée, plus l'état de la route est importante»