Chap F4 : Fractions rationnelles

1 – Définition et Dérivée

Définition 1 : On appelle **fraction rationnelle** toute fonction f de la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont des polynômes.

Exemple 1 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ est une fraction rationnelle.

On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x^2 + 1$.

Définition 2 : On considère une fraction rationnelle $f = \frac{u}{v}$. On appelle **fonction dérivée** de f, la fonction f' définie par $f' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

Exemple 2 : Calculer la dérivée f' de la fonction $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

On commence par dériver les fonction u et v : $\begin{cases} u = 3x \\ u' = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} v = x^2 + 1 \\ v' = 2x \end{cases}$.

On applique la formule $f' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ et on obtient $f'(x) = \frac{3\times(x^2+1)-2x\times 3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-6x+3}{(x^2+1)^2}$

2 – Sens de variation

Théorème 1 : Soit f une fraction rationnelle et I un intervalle. Alors :

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est **décroissante** sur I.

Exemple 3 : Réaliser le tableau de variation de la fonction f définie pour $x \neq -\frac{1}{3}$, par $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$

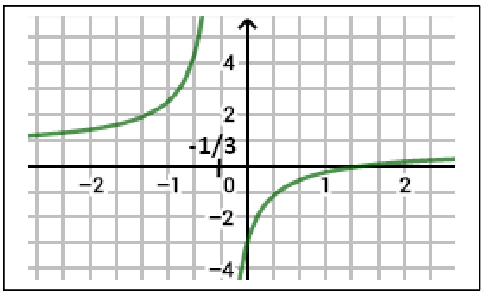
On commence par dériver la fonction f :

f est une fraction rationnelle : On a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u = 2x - 3 \\ u' = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} v = 3x + 1 \\ v' = 3 \end{cases}$

On applique la formule $f' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ et on obtient $f'(x) = \frac{2\times(3x+1)-3(2x-3)}{(3x+1)^2} = \frac{6x+2-6x+9}{(3x+1)^2} = \frac{11}{(3x+1)^2}$

Or pour tout $x \neq -\frac{1}{3}$, $(3x+1)^2 > 0$ et $11 > 0$. Donc pour tout $x \neq -\frac{1}{3}$ on a $\frac{11}{(3x+1)^2} > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	↗	‖	↗



Fractions rationnelles – Fiche d'exercices

Ex 1 QCM (Tiré du bac Antilles-Guyane 2015)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+5x}{3x+4}$$

La dérivée de la fonction f est donnée par :

a) $f'(x) = \frac{2x+5}{3}$ b) $f'(x) = \frac{9x^2+38x+20}{(3x+4)^2}$ c) $f'(x) = \frac{3x^2+8x+20}{(3x+4)^2}$

Ex 2 Difficultés économiques (Tiré du bac Polynésie Septembre 2017)

Une entreprise qui connaît des difficultés économiques souhaite réaliser des prévisions de son chiffre d'affaires mensuel pour l'année 2018.

Partie A

On estime que le chiffre d'affaires mensuel sera de 35 millions d'euros en janvier 2018 et que celui-ci diminuera chaque mois de 18 %.
On définit la suite (c_n) en notant c_n le chiffre d'affaires exprimé en millions d'euros pour le n-ième mois de l'année 2018; on a ainsi $c_1 = 35$.

1. Calculer la valeur de c_2 et vérifier qu'une valeur approchée de c_3 est 23,5.
2. **a.** Déterminer la nature de la suite (c_n).
   b. Donner la valeur du chiffre d'affaires pour le mois de décembre 2018.
3. Au cours de quel mois le chiffre d'affaires mensuel sera-t-il pour la première fois inférieur à 5 millions d'euros?
4. On considère l'algorithme incomplet ci-contre :
   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il réponde à la question **3.** précédente.

Variables :	U nombre réel
	N nombre entier
Traitement :	U prend la valeur 35
	N prend la valeur 1
	TANT QUE $U \geqslant 5$
	U prend la valeur … .
	N prend la valeur $N+1$
	FIN TANT QUE
Sortie :	AFFICHER ……

Partie B

Cette entreprise a la possibilité de bénéficier d'une aide de l'État.
Avec cette aide, on modélise le chiffre d'affaires mensuel en millions d'euros par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;12]$ par

$$f(x) = \frac{15x+20}{x}.$$

Ainsi, $f(1)$ désigne le chiffre d'affaires du mois de janvier, $f(2)$ désigne le chiffre d'affaires du mois de février, etc.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   Donner le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;12]$.
2. Montrer qu'avec ce modèle, le chiffre d'affaires mensuel restera supérieur à 15 millions d'euros durant l'année 2018.

Ex 3 Mine de Plomb (Tiré du bac Polynésie Septembre 2014)

Pour une nouvelle mine de plomb, les experts d'une entreprise modélisent le chiffre d'affaires (en milliers d'euros) avec la fonction f définie sur $[0\,;2\,000]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1000}$$

où x désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.
La représentation graphique de cette fonction est tracée en **annexe 1** qui sera à rendre avec la copie.

Partie A

1. On note f' la dérivée de f sur $[0\,;2\,000]$, montrer que :
$$f'(x) = \frac{x^2+2000x}{(x+1000)^2}.$$
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;2\,000]$; en déduire le tableau de variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 500$ sur $[0\,;2\,000]$.
4. Que signifie ce résultat pour l'entreprise?

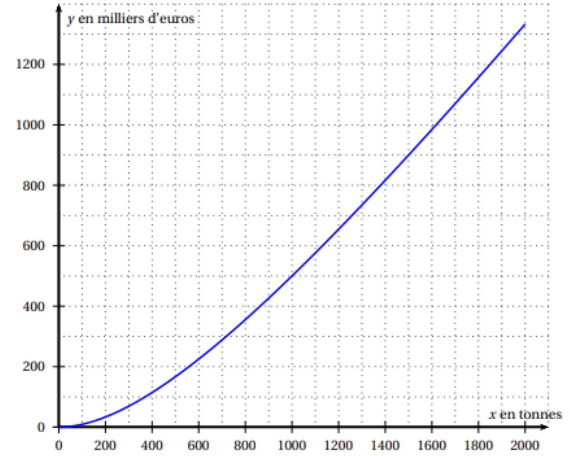
Partie B

Les coûts d'extraction et de traitement sont donnés (en milliers d'euros) par la fonction linéaire :

$$g(x) = 0{,}6x$$

où x désigne la masse de plomb vendue, exprimée en tonnes.

1. Tracer la droite d'équation $y = 0{,}6x$ sur le graphique donné en **annexe 1 à rendre avec la copie.**
2. Les géologues ont prévu d'extraire 1 400 tonnes de plomb.
   Le chiffre d'affaires sera-t-il supérieur au coût? Justifier la réponse.



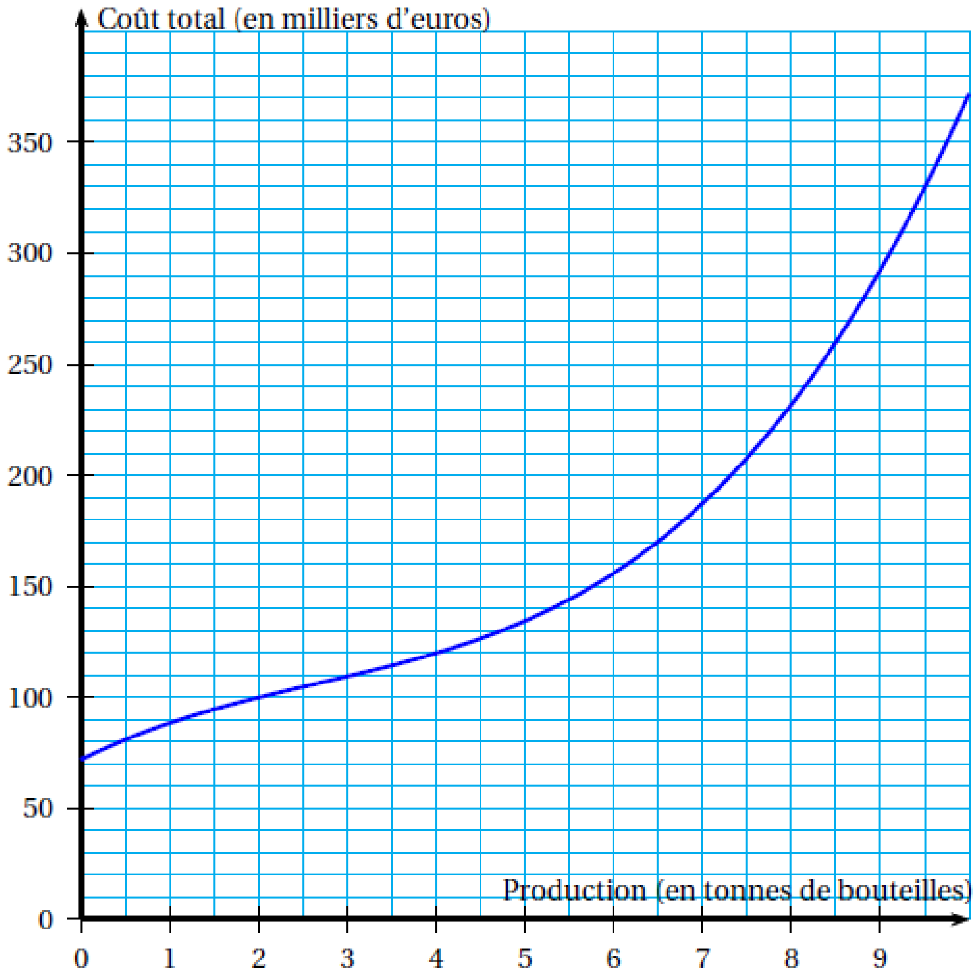
Ex 4 Mine de Plomb (Tiré du bac Centre Etrangers 2015)

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10.

Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0 10] par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

On a représenté ci-dessous la fonction f dans un repère orthogonal du plan.



Partie A

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles.
2. Déterminer, par lecture graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros.

Partie B

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle]0 ; 10] par :

$$C_M(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction C_M, notée C'_M.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle]0 ; 10], $C'_M(x)$ peut s'écrire

$$C'_M(x) = \frac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2}.$$

3. Justifier que $C'_M(x)$ est du signe de $x-6$ pour x variant dans l'intervalle]0 ; 10] et en déduire le tableau des variations de la fonction C_M.
4. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal.

Partie C

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Montrer que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle [0; 10] est :

$$B(x) = -0,5x^3 + 4x^2 + 20x - 72.$$

2. Calculer le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes.
3. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ? Justifier la réponse.

Ex 5 Collectivité locale (Tiré du bac Polynésie 2015)

Un audit est effectué auprès d'une collectivité locale afin de connaître l'évolution de son budget concernant sa dépense pour l'équipement (véhicules, fournitures,...).
Cette évolution est résumée dans le tableau suivant où la dépense est exprimée en centaine de milliers d'euros :

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6
Dépense (y_i)	16,5	11	9,4	6,1	5,7	4,6

En annexe page 6 à rendre avec votre copie, on a représenté le nuage des points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A :

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation réduite de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Elle sera notée (d) et on arrondira ses coefficients à 0,01 près.

Pour la suite, on utilisera comme équation de la droite (d) : $y=-2{,}2x+16{,}8$.

2. **a.** Tracer cette droite dans le repère donné en annexe.

   b. À l'aide de cet ajustement, donner une estimation de la dépense de la collectivité locale pour l'année 2015.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;15]$ par $f(x)=\dfrac{20x+21}{x^2+1}$.

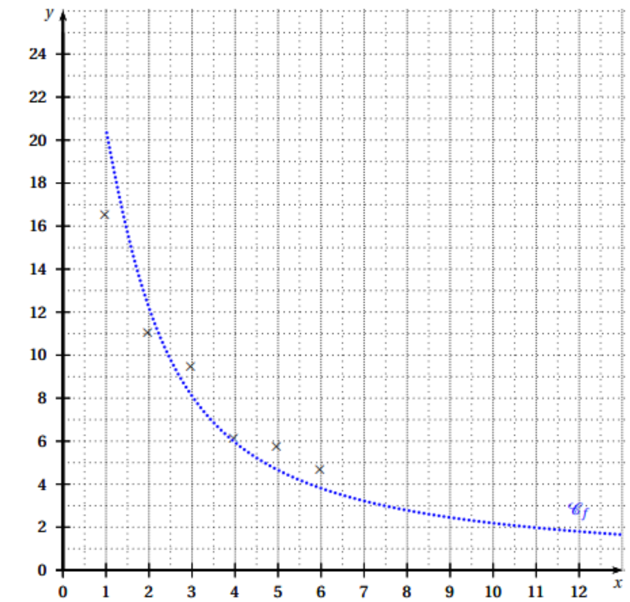
La représentation graphique C_f de la fonction f est tracée sur le graphique en annexe.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

On admet que $f'(x)=\dfrac{-20x^2-42x+40}{(x^2+1)^2}$ pour tout nombre réel $x\in[1;15]$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;15]$.

2. On choisit désormais la courbe C_f comme ajustement du nuage de points.
   À l'aide de cet ajustement, donner une estimation de la dépense de la collectivité locale pour l'année 2015.



Ex 6 Campagne publicitaire (Tiré du bac Métropole 2016)

Une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines, dans une ville donnée, afin de promouvoir une nouvelle marque de boissons gazeuses.

Partie A

Une étude montre qu'après x semaines de campagne publicitaire, le pourcentage des personnes résidant dans cette ville ayant pris connaissance de la marque est donné par l'expression

$$f(x)=\frac{75x}{x+2}$$

où x est un réel compris entre 0 et 30.
La courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 10] est fournie en annexe 2.
L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit cette nouvelle marque de boissons est qu'au moins 70 % des habitants de la ville aient pris connaissance de cette marque.

1. Peut-on affirmer qu'après 10 semaines de publicité, l'objectif fixé est atteint ? Justifier la réponse.
2. Déterminer graphiquement le nombre de semaines nécessaires pour que le pourcentage d'habitants ayant pris connaissance de la marque passe de 50 % à 60 %. On laissera apparents les tracés utiles.
3. On note f' la dérivée de f. Montrer que, pour tout réel $x \in [0 ; 15]$,
   $$f'(x)=\frac{150}{(x+2)^2}$$
4. En utilisant le signe de sa dérivée, déterminer les variations de f sur l'intervalle [0 ; 15].
5. Après ces 15 semaines de campagne, l'agence demande un délai supplémentaire. Justifier cette demande.
6. Combien de semaines supplémentaires de campagne seront nécessaires à l'agence pour atteindre l'objectif fixé par l'entreprise ?

Ex 7 Ecoland (Tiré du bac Polynésie 2018)

Partie A

Dans le pays Ecoland, en 2080, les véhicules roulent exclusivement à l'électricité ou aux biocarburants. Par ailleurs, il existe des véhicules sans chauffeur.

70 % des véhicules sont avec chauffeur. Parmi eux, $\frac{4}{7}$ roulent aux biocarburants et les autres roulent à l'électricité.

30 % des véhicules sont sans chauffeur. Parmi eux, $\frac{2}{3}$ roulent aux biocarburants et les autres roulent à l'électricité.

On choisit un véhicule de ce pays au hasard et on note :

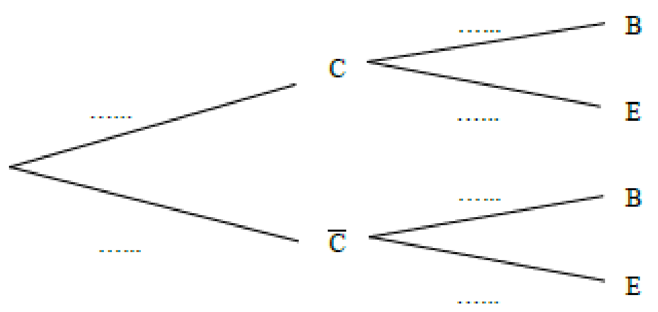
C l'événement : « le véhicule est avec chauffeur » ;

B l'événement : « le véhicule roule aux biocarburants » ;

E l'événement : « le véhicule roule à l'électricité ».

Les probabilités seront exprimées en valeur exacte (fraction irréductible ou forme décimale).

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous permettant de modéliser la situation :



où $\overline{C}$ désigne l'événement contraire de C.

2. Déterminer la probabilité que le véhicule choisi roule aux biocarburants.

3. On suppose que le véhicule choisi roule aux biocarburants.

Déterminer la probabilité que ce soit un véhicule sans chauffeur.

Partie B

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule.

Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur $[30;130]$ par :

$$f(x)=\frac{8x^2-800x+30000}{x^2} \text{ pour } x \text{ dans } [30;130],$$

où x est exprimé en km/h et $f(x)$ est exprimé en litres pour 100 km.

1. Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à 30 km/h, quelle est sa consommation ? Et lorsqu'il roule à 50 km/h ?

2. Montrer que la dérivée f' de f sur $[30;130]$ peut s'écrire $f'(x)=\frac{800x-60000}{x^3}$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30;130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

4. Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimale ?

Que vaut alors cette consommation (arrondir à 0,01 près) ?

5. On considère l'algorithme ci-dessous :

$x \leftarrow 30$

$y \leftarrow \frac{44}{3}$

Tant que $y \geq 4$

  $x \leftarrow x+1$

  $y \leftarrow \frac{8x^2-800x+30000}{x^2}$

Fin Tant que

Quelle est la valeur de la variable x à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.