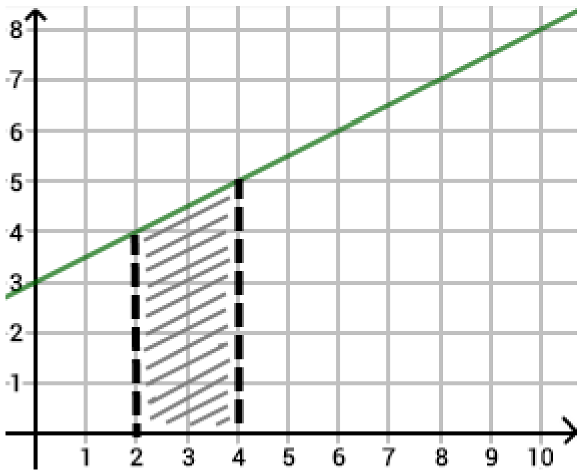
Chapitre F5 : Intégration

Activité 1 : Vers la notion d'intégrale.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x+3$.



1) Déterminer l'aire de la partie hachurée, délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les deux axes verticaux d'équation $x=2$ et $x=4$.

   Cette aire est appelée ***l'intégrale*** *de la fonction f entre 2 et 4 et est notée $\int_2^4 f(x)\,dx$.*

   C'est « ***l'aire sous la courbe*** *» de f, entre 2 et 4.*

2) a. Déterminer graphiquement $\int_4^8 f(x)\,dx$.

   b. En déduire la valeur de $\int_2^8 f(x)\,dx$.

   Cette relation s'appelle ***la relation de Chasles*** *: $\int_2^8 f(x)\,dx=\int_2^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx$.*

3) On considère la fonction F qui à chaque x de $[0;+\infty[$ associe « l'aire sous courbe » de f entre 0 et x :

   $F(t)=\int_0^x f(t)\,dt$

   a. Combien vaut $F(0)$?

   b. Déterminer une expression algébrique de $F(x)$ en fonction de x.

   c. Calculer la dérivée F' de la fonction F. Que remarque t-on ?

   On dit que la fonction F est une ***primitive*** *de la fonction f lorsque $F'=f$*

4) Utiliser la question précédente, pour déterminer par le calcul les intégrales suivantes

   a. $\int_0^5 f(x)\,dx$

   b. $\int_0^{10} f(x)\,dx$

   c. $\int_1^7 f(x)\,dx$

   d. $\int_3^9 f(x)\,dx$

   Si F est une primitive de la fonction f alors on a la formule : $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Activité 2 : Lien entre Aire sous la courbe & Primitive d'une fonction

Dans l'activité précédente nous avons mis en évidence un lien entre « l'aire sous la courbe » d'une fonction et la notion de primitive. Dans cette activité, nous allons vérifier ce lien sur différents types de fonctions :

Fonction constante

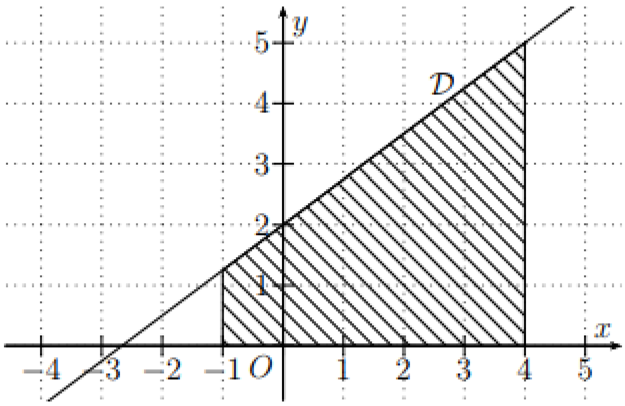
La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3$.

1. Calculer l'aire du rectangle hachuré, en carreaux.
2. Donner une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(1)$.
3. Comparer les deux résultats.

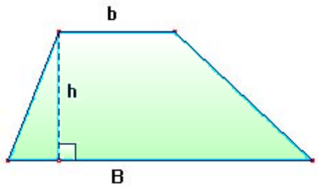
Fonction affine

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{3}{4}x + 2$ représente la fonction $f(x) = \dfrac{3}{4}x + 2$.

1. Calculer l'aire du trapèze hachuré, en carreaux.
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(4) - F(-1)$.
3. Comparer les deux résultats.



Rappel : L'aire d'un trapèse de bases b et B et de hauteur h est égal à $Aire = \frac{1}{2}(b + B)h$

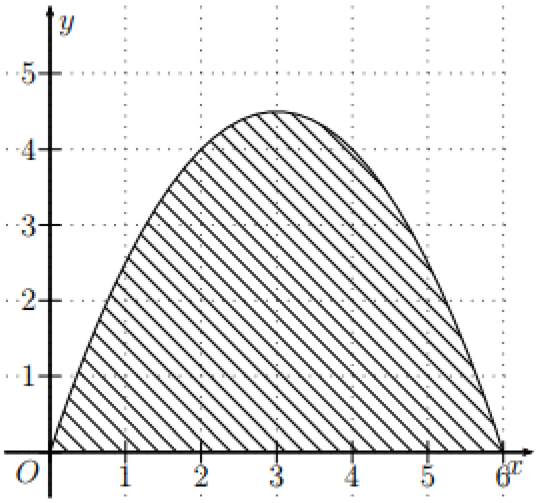


Fonction trinôme

ARCHIMÈDE démontra à l'aide de suites que « *Un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à 4 fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur.* ». (admis)

La parabole ci-contre représente la fonction $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$ sur $[0\,;\,6]$.

1. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du secteur parabolique hachuré.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(0)$.
3. Comparer les deux résultats.



1 – Primitive d'une fonction

a. La notion de « Primitive »

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 : On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I, si F est dérivable sur I et que la dérivée de F est égale à f : $F' = f$

Exemple 1 :

• Si $f(x) = 3x^2$ alors la fonction $F(x) = x^3$ est une primitive de f.

• La fonction $F(x) = \underbrace{x}_{u}\times\underbrace{\ln x}_{v} - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien $f(x) = \ln x$:

En effet, $F'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{v} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \times \underbrace{x}_{u} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$.

Propriété 1 : Si f admet une primitive F sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions de la forme $x \to F(x) + C$ où C est une constante réelle.

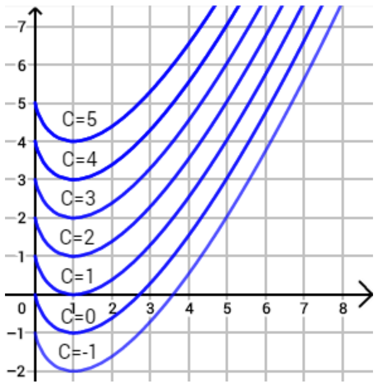
Remarque : Toutes les fonctions de la forme $x \to F(x) + C$ admettent la fonction f comme dérivée car la dérivée d'une constante est nulle.

Exemple 2 :

• La fonction $F(x) = x^3 + 1$ est aussi une primitive de la fonction $f(x) = 3x^2$

• L'ensemble des primitives de la fonction logarithme népérien est constitué des fonctions sous la forme :

$$F(x) = x\ln x - x + C \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$



Propriété 2 : Soit f une fonction admettant des primitives F sur I alors pour tous nombres réels x_0 et y_0, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$.

Exemple 3 :

• La fonction $F(x) = x^3$ est l'unique primitive de $f(x) = 3x^2$ qui s'annule en 0 (tel que $F(0) = 0$)

• Cherchons la primitive de la fonction logarithme népérien qui s'annule en 1 (tel que $F(1) = 0$)

Les primitives de la fonction $f(x) = \ln x$ sont de la forme $F(x) = x\ln x - x + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Si $F(1) = 0$ alors $1 \times \ln 1 - 1 + C = 0$ d'où $-1 + C = 0$ d'où $C = 1$.

Ainsi l'unique primitive de f qui s'annule en 1 est la fonction $F(x) = x\ln x - x + 1$.

b. Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Primitives F de f	Intervalle I
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = x^n$ où n entier, $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	Si $n > -1$: $\mathbb{R}$ Si $n < -1$: $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$	$[0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x\ln x - x + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$

c. Primitives et Opérations

Propriété 3 : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et k une constante réelle.

- Si F est une primitive de f sur I, alors kF est une primitive de kf sur I.
- Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Primitives F de f sur I	Conditions particulières
$f = u'u^n$ où n entier, $n \neq -1$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I lorsque $n < -1$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F(x) = \ln(u) + C$	$u(x) > 0$ sur I
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u + C$	Aucune

Exemple 4 : Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes

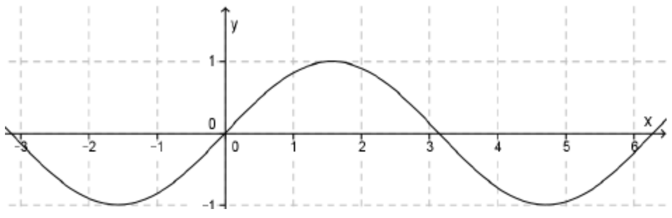
- $f(x) = x^2 + e^x$: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + e^x + C$
- $f(x) = 2x^2 - 4x$: $F(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + C$
- $f(x) = 3 \times (3x+5)^2$: $f = u'u^n$ avec $u = 3x + 5$; $u' = 3$ et $n = 2$ d'où $F(x) = \frac{1}{3}(3x+5)^3 + C$
- $f(x) = \frac{3-4x}{-2x^2+3x+1}$: $f = \frac{u'}{u}$ avec $u = -2x^2 + 3x + 1$; $u' = 3 - 4x$ d'où $F(x) = \ln(-2x^2 + 3x + 1) + C$
- $f(x) = 2xe^{x^2-1}$: $f = u'e^u$ avec $u = x^2 - 1$; $u' = 2x$ d'où $F(x) = e^{x^2-1} + C$
- $f(x) = \frac{5}{2x+6}$: On pose $u = 2x + 6$ donc $u' = 2$. $f(x) = \frac{5 \times \frac{1}{2} \times 2}{2x+6} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{2x+6}$ donc $f = 2.5 \times \frac{u'}{u}$

  On a donc $F = 2.5\ln u$ d'où $F(x) = 2.5\ln(2x+6)$
- $f(x) = e^{-2x}$: $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2) \times e^{-2x}$ donc $f = -\frac{1}{2} \times u'e^u$ avec $u = -2x$ d'où $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

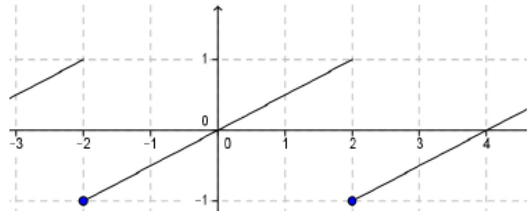
2 – Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

a. Notion de fonction continue

Une fonction est continue sur un intervalle I si sa courbe peut être tracée « sans lever le crayon » sur I



Fonction continue sur $\mathbb{R}$



Fonction discontinue en … ; -6 ; -2 ; 2 ; 6 ; …

Théorème 1 : Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

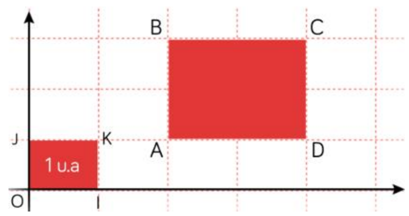
Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse. Voici deux contre-exemples :

- La fonction racine carré est continue mais pas dérivable en 0 car sa tangente T_0 est verticale.
- La fonction valeur absolue est continue mais pas dérivable en 0 car elle n'admet pas de tangente en 0.

b. Intégrale d'une fonction continue positive

Dans un repère orthogonal, on appelle unité d'aire (notée $u.a.$), l'aire du rectangle $OIKJ$ où $O(0;0)$, $I(1;0)$, $J(0;1)$ et $K(1;1)$.

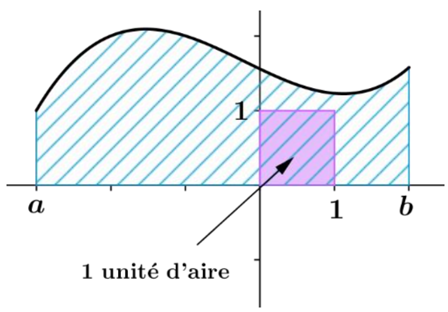
Exemple 5 : L'aire du rectangle $ABCD$ est alors égale à $4\ u.a.$



Définition 2 : On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle $I = [a;b]$.

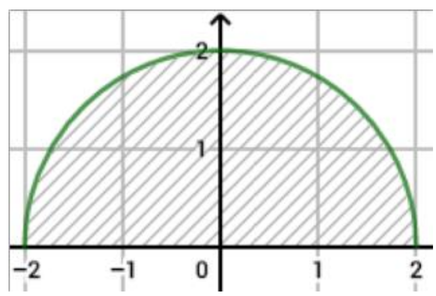
On appelle **intégrale de f de a à b**, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$, l'aire du domaine D délimitée par :

- L'axe des abscisses
- La courbe C_f représentative de la fonction f
- Les deux axes verticaux d'équation $x = a$ et $x = b$.



Exemple 6 : On considère la fonction définie sur l'intervalle $I = [-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Sa courbe représentative est un demi-cercle centrée en l'origine du repère et de rayon $r = 2$. Calculer $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \mathcal{A}_{Demi-cercle} = \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi\ (u.a.)$

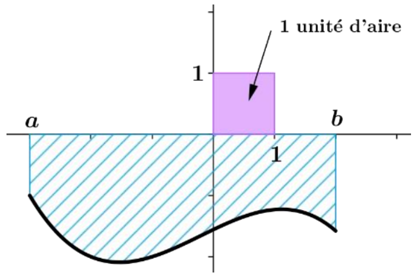


c. Intégrale d'une fonction de signe quelconque

La définition d'une intégrale s'étend aux fonctions négatives : On donne un signe négatif aux portions qui sont situées sous l'axe des abscisses :

- L'intégrale de a à b, d'une fonction f continue et négative sur l'intervalle $I = [a; b]$ est l'opposée de l'aire du domaine D délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les axes $x = a$ et $x = b$.

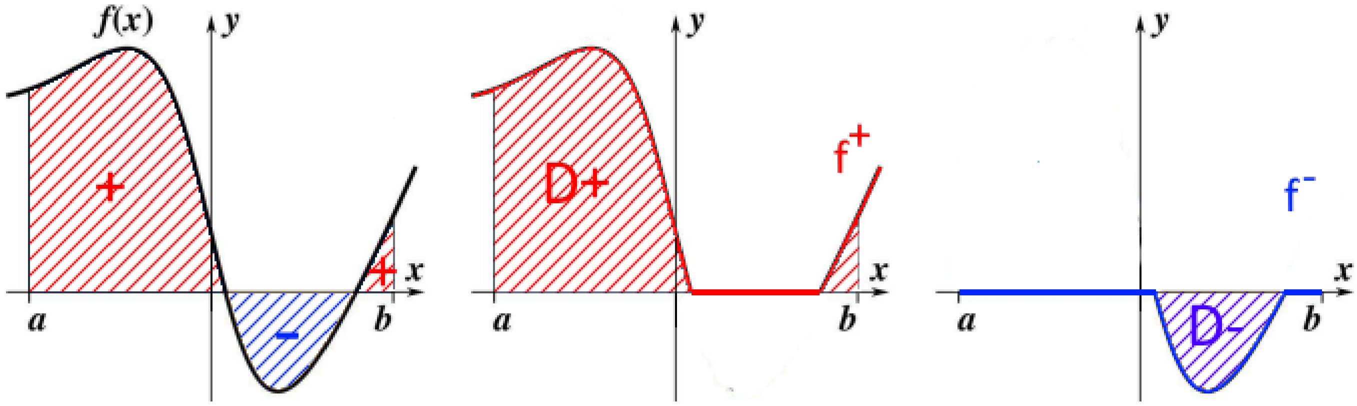
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}(D)$$



- Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et de signe quelconque.

On introduit alors les fonctions f^+ et f^- de la façon suivante :

$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ } si \text{ } f(x) > 0 \\ 0 \text{ } sinon \end{cases}$ (Partie positive) et $f^-(x) = \begin{cases} f(x) \text{ } si \text{ } f(x) < 0 \\ 0 \text{ } sinon \end{cases}$ (Partie négative)



L'intégrale de a à b de la fonction f est alors définie de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)$$
$$= \mathcal{A}(D^+) - \mathcal{A}(D^-)$$

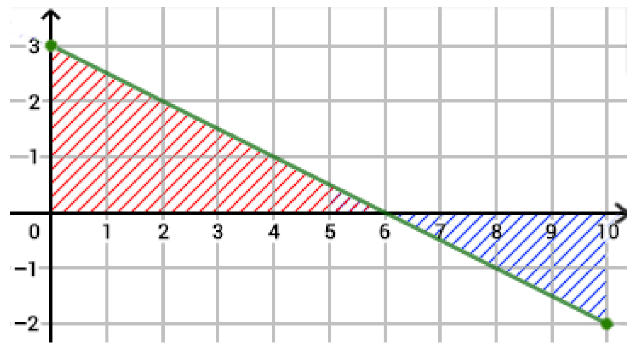
<u>Exemple 7</u> : Soit f la fonction définie sur $I = [0; 10]$ par $f(x) = -0.5x + 3$

Déterminer graphiquement la valeur de $\int_0^{10} f(x)\,dx$.

$$\mathcal{A}(D^+) = \frac{\mathcal{B} \times h}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

$$\mathcal{A}(D^-) = \frac{\mathcal{B} \times h}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 3$$

$\int_0^{10} f(x)\,dx = \mathcal{A}(D^+) - \mathcal{A}(D^-) = 9 - 3 = 6\,(u.a.)$



3 – Intégrales & Primitives

Théorème 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I, et on a $F'(x) = f(x)$

Remarque :

- En d'autres termes la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction f sur I.
- Dans l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$, la variable d'intégration doit être différente de x.

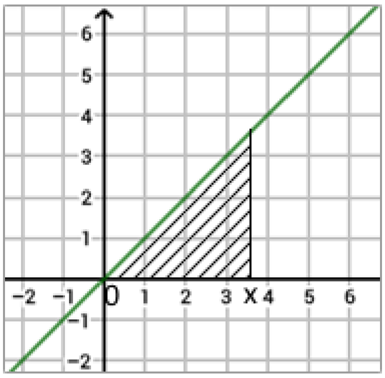
Exemple 8 : En utilisant le théorème précédent, on peut retrouver la primitive de la fonction $f(x) = x$

On prend $a = 0$ pour simplifier les calculs.

Une primitive de la fonction $f(x) = x$ est alors donnée par la formule :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \mathcal{A}_{Partie\ hachurée} = \frac{\mathcal{B} \times h}{2}$$

D'où $F(x) = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2}$



Théorème 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et F une primitive de la fonction f. Alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Remarque : Le résultat de $\int_a^b f(x)\,dx$ est indépendant du choix de la primitive car toutes les primitives de f diffèrent d'une constante : $F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a) + C - C = F(b) - F(a)$.

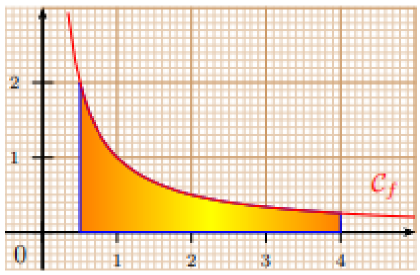
Notation : On note alors $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple 9 : Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$.

$$\mathcal{A}_{Domaine} = \int_{0.5}^{4} f(x)\,dx$$

$F(x) = \ln x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

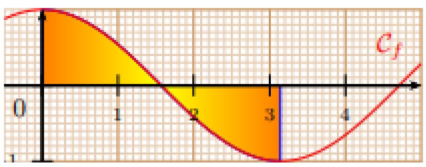
$$\int_{0.5}^{4} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{0.5}^{4} = \ln 4 - \ln\frac{1}{2} = \ln 4 + \ln 2 = 2\ln 2 + \ln 2 = 3\ln 2$$



Exemple 10 : $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

$F(x) = \sin x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \cos x$

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

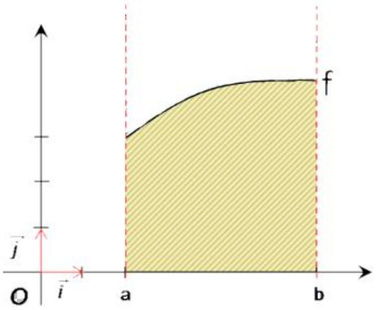


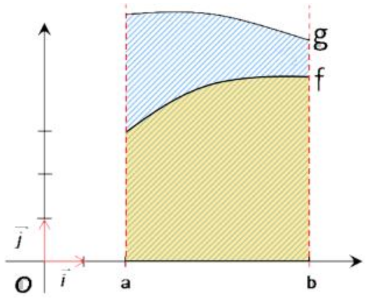
4 – Propriétés de l'intégrale

a. Positivité

Propriété 4 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b]$.

- Si $f(x) \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$





b. Linéarité

Propriété 5 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b]$ et k une constante réelle.

- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b (k \times f(x))\,dx = k \times \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque : Cette propriété permet de ramener le calcul de l'intégrale d'une fonction complexe, à une succession d'intégration de fonctions plus simples :

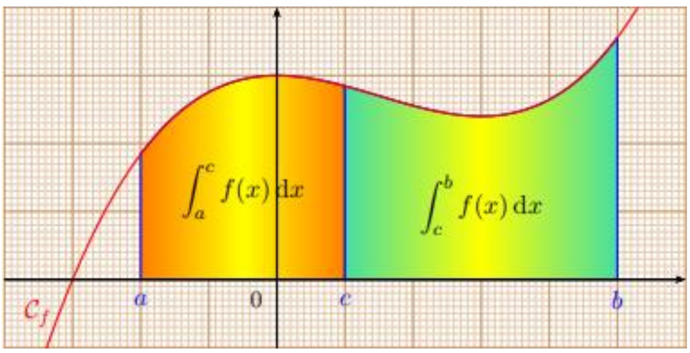
Exemple 11 : Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^2 6x + \frac{5}{x}\,dx$

- On décompose l'intégrale : $I = \int_1^2 6x + \frac{5}{x}\,dx = \int_1^2 6x + \int_1^2 \frac{5}{x}\,dx = 3 \times \int_1^2 2x\,dx + 5 \times \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$
- On obtient en passant aux primitives : $I = 3 \times [x^2]_1^2 + 5 \times [\ln(x)]_1^2$
- Finalement, $I = 3 \times (2^2 - 1^2) + 5 \times (\ln(2) - \ln(1)) = 9 + 5\ln 2$

c. Relation de Chasles

Propriété 6 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et soit c un nombre de I

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

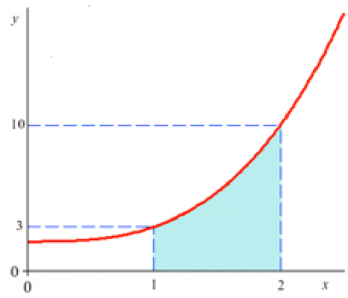


5 – Applications

a. Calcul d'aires

• Pour calculer l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction positive, on calcule $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 12 : Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimitée par la courbe de la fonction $f(x) = x^3 + 2$, l'axe des abscisses, et les droites $x = 1$ et $x = 2$.



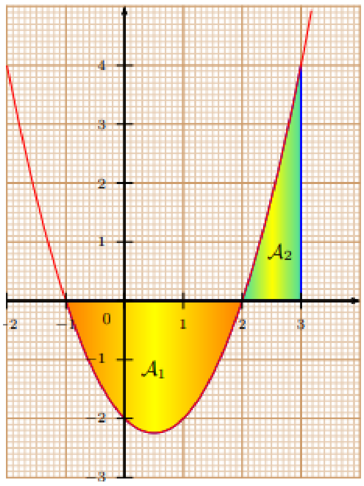
Une primitive de f est donnée par la fonction $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x$

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x\right]_1^2 = F(2) - F(1)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times 16 + 4\right) - \left(\frac{1}{4} + 2\right) = 6 - \frac{1}{4} = 5.75\ u.a$$

• Pour calculer l'aire d'un domaine défini par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant puis utiliser la relation de Chasles.

Exemple 13 : Calculer l'aire du domaine délimitée par la courbe de la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$, l'axe des abscisses, et les droites $x = -1$ et $x = 3$



On a $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ avec $\mathcal{A}_1 = -\int_{-1}^2 f(x)dx$ et $\mathcal{A}_2 = \int_2^3 f(x)dx$

Une primitive de f est donnée par la fonction $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^2 = F(2) - F(-1) = -\frac{10}{3} - \left(\frac{7}{6}\right) = -\frac{9}{2}$$

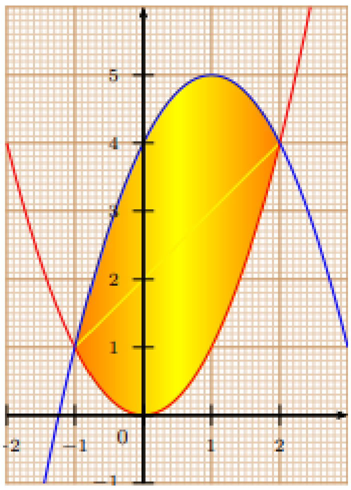
$$\int_2^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^3 = F(3) - F(2) = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{11}{6}$$

Ainsi, $\mathcal{A} = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} = \frac{19}{3} \approx 6.33\ u.a.$

• Pour calculer l'aire d'un domaine compris délimité par deux courbes on utilise la propriété suivante :

Propriété 7 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b]$ telle que pour tout x de I on a $f(x) \leq g(x)$. L'aire du domaine délimitée par leur courbe respective C_f et C_g et par les axes d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$

Exemple 14 : Calculer l'aire du domaine délimitée par les courbes des fonctions $f(x) = x^2$et $g(x) = -x^2 + 2x + 4$, et les droites $x = -1$ et $x = 2$



On a $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)]dx = \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4\ dx$

Une primitive de $g - f$ est donnée par la fonction $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x$

$$\int_{-1}^2 [g(x) - f(x)]dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^2 = F(2) - F(-1) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)$$

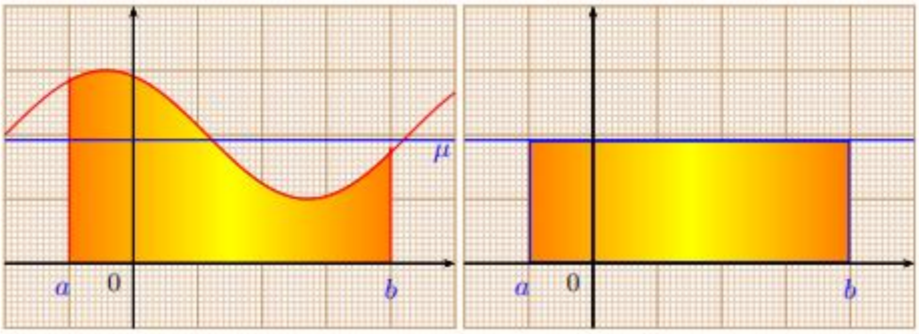
$$= \frac{27}{3} = 9\ u.a.$$

Ainsi, $\mathcal{A} = 5\ u.a.$

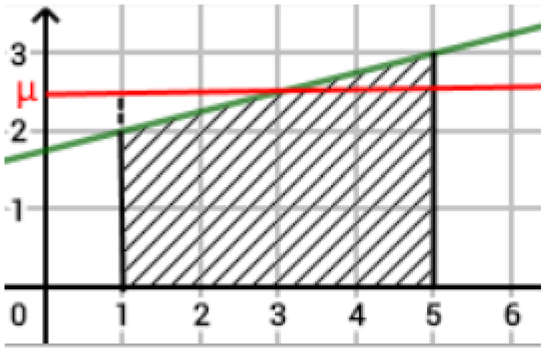
b. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 3 : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a; b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur I le nombre réel : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque : Le réel μ est le nombre tel que l'aire sous la courbe de f entre a et b soit égale à l'aire du rectangle dont les côtés ont pour mesures $b - a$ et μ.



Exemple 14 : Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ sur l'intervalle $I = [1; 5]$.



On a $\mu = \frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_1^5 \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}\,dx$

Une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{4}x$

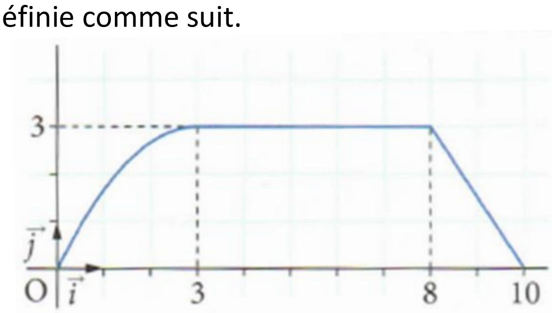
$F(5) - F(1) = \frac{25}{8} + \frac{35}{4} - \frac{1}{8} - \frac{7}{4} = \frac{24}{8} + \frac{28}{4} = 3 + 7 = 10$

Donc $\mu = \frac{1}{4} \times 10 = 2.5$

Exemple 15 : On dispose ci-contre du relevé de vitesse d'une voiture télécommandé sur une durée de $10s$.

On admet que la vitesse (en m/s) est donnée par la fonction v définie comme suit.

$$v(t) = \begin{cases} 2t - \dfrac{t^2}{3} & si\ 0 \leq t \leq 3 \\ 3 & si\ 3 \leq t \leq 8 \\ 15 - \dfrac{3}{2}t & si\ 8 \leq t \leq 10 \end{cases}$$



On note $d(t)$ la distance parcourue (en m) au bout du temps t.

1) Calculer la vitesse moyenne du véhicule pendant les $10s$ de déplacement.

$\mu = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} v(t)\,dt = \frac{1}{10}\left[\int_0^3 v(t)\,dt + \int_3^8 v(t)dt + \int_8^{10} v(t)\,dt\right]$

$\int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3 2t - \frac{t^2}{3}\,dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{9}\right]_0^3 = 9 - 3 = 6$; $\int_3^8 v(t)dt = 5 \times 3 = 15$ et $\int_8^{10} v(t)dt = \frac{2\times3}{2} = 3$

Donc $\mu = \frac{1}{10}(6 + 15 + 3) = 2.4$. La vitesse moyenne est donc de $2.4\ m/s$.

2) On admet que la fonction vitesse $v(t)$ est la dérivée de la fonction distance $d(t)$. Calculer la distance parcourue pendant les 3 premières secondes.

Si $v(t) = d'(t)$ cela signifie que la fonction d est une primitive de la fonction v : $d(t) = \int_0^t v(x)dx$

La distance parcourue pendant les 3 premières secondes est $d(3) = \int_0^3 v(x)dx = 6\ m$

Exercice 1 **(Calcul de primitives)**

Déterminer les primitives des fonctions données, définies sur I.

1. $f(x) = x^5$; $I = \mathbb{R}$
2. $g(t) = t^7$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$; $I = \mathbb{R}_+^*$
4. $u(t) = t^3 - 3t + 4$; $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = x^6 + x^3 - x$; $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = 3x^2 - 5x^3 + \pi x$ $I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \sin(4x)$; $I = \mathbb{R}$
8. $f(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2}$; $I = \mathbb{R}_+^*$
9. $f(x) = (2x+1)(x^2+x-7)^3$
10. $g(x) = \dfrac{-2}{3x^5} + \dfrac{4}{3x^2}$; $I = \mathbb{R}_+^*$
11. $f(t) = -3\cos(3t-2)$; $I = \mathbb{R}$
12. $f(x) = (x+1)^4$; $I = \mathbb{R}$
13. $h(t) = \cos(x)\sin(x)^2$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 2 **(Primitives uniques)**

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie la condition donnée.

1. $f(x) = \cos(x)$; $F(0) = 1$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$; $F(1) = 2$; $I = \mathbb{R}_+^*$
3. $f(t) = \cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 3x^2(x^3+2)$; $F(-1) = \dfrac{1}{2}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 3 **(Primitives uniques)**

Soit f la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$.

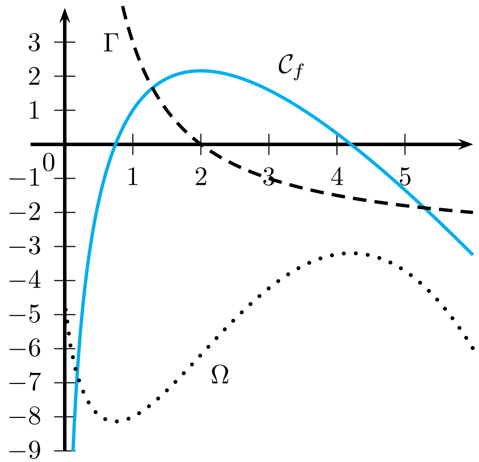
1. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que, pour tout x de $]-3;+\infty[$, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+3)^2}$.
2. En déduire les primitives de f sur $]-3;+\infty[$.
3. Déterminer la primitive F_0 de f sur $]-3;+\infty[$ qui vérifie $F_0(0) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 4 **(Exercice du bac STI2D Polynésie 2014)**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 6\ln x + ax + b$ où a et b sont des constantes réelles. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, I, J).
Le point A$(1\,;\,1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

PARTIE A

Sur le graphique ci-contre, on a tracé $\mathcal{C}_f$ (trait plein) ainsi que les courbes Γ et Ω.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.



1. Indiquer laquelle des deux courbes est la représentation graphique de F.
2. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de a.
4. à l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $[f(x) = 6\ln x - 3x + 4$.

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathcal{C}_f$ fournie dans la partie A.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner les variations de la fonction f.
4. En déduire que la fonction f admet un extremum dont on calculera la valeur exacte.

PARTIE C

Soit H la fonction définie sur $]\,0;\ +\infty[$ par : $H(x) = 6x\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 - 2x$.

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Calculer la valeur exacte de $I = H(e) - H(1)$ puis en donner une interprétation graphique.
3. (a) à l'aide du graphique, donner la valeur de $F(1)$.
   (b) En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 1

Exercices 4 à 7 page 176 « Hachette ».

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

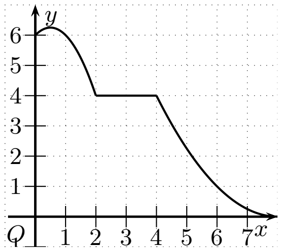
1. $\displaystyle\int_0^3 (x+4)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_2^0 (x^2+x)\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{-2} 4t^3\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_2^{-1} 3x^3\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(3t^2+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^3}\mathrm{d}x$

Exercice 3

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0;8]$

par : $f(x) = \begin{cases} -x^2+x+6 & \text{si } x\in[0;2] \\ 4 & \text{si } x\in[2;4] \\ \frac{1}{4}x^2+4x+16 & \text{si } x\in[4;8] \end{cases}$.

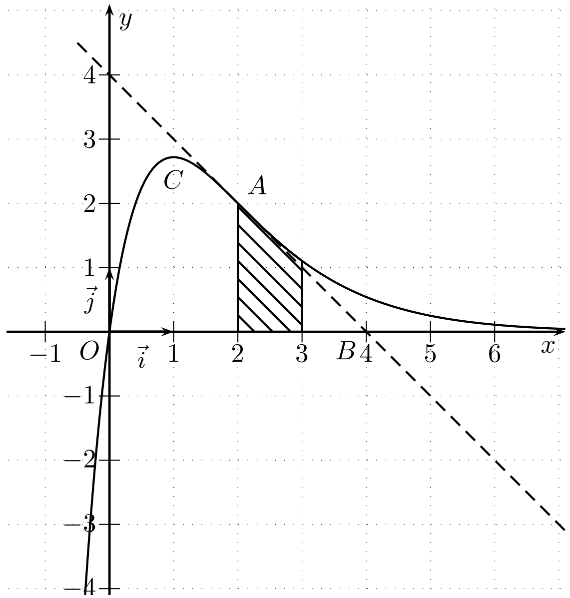
Donner une interprétation graphique, puis calculer $\displaystyle\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$.

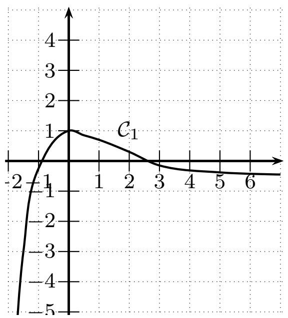


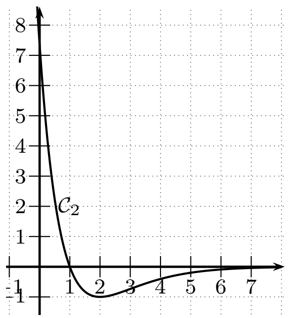
Exercice 4

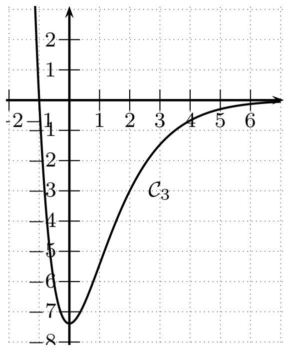
On a représenté, sur la figure ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $O\,(0\,;\,0)$ et $A\,(2\,;\,2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine hachuré $\mathcal{D}$ est délimité par les droites d'équation $x=2$, $x=3$, l'axe des abscisses et la courbe Γ.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Avec la précision permise par le graphique :
   (a) Déterminer les solutions des équations suivantes :
   i) $g(x)=2$ ii) $g(x)=-2$ iii) $g(x)=4$.
   (b) Plus généralement, déterminer, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=\lambda$.
3. Une des représentations graphiques, figure, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
4. (a) Une des représentations graphiques, représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
   (b) En déduire l'aire du domaine hachuré $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.









Intégration – Fiche d'exercices (bac)

Ex 1 QCM (Tiré de divers sujets de bac)

1. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

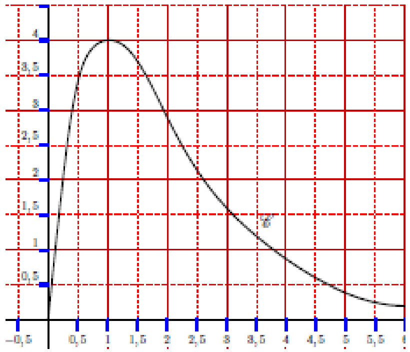
On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de I est :

a. $6 < I < 8$

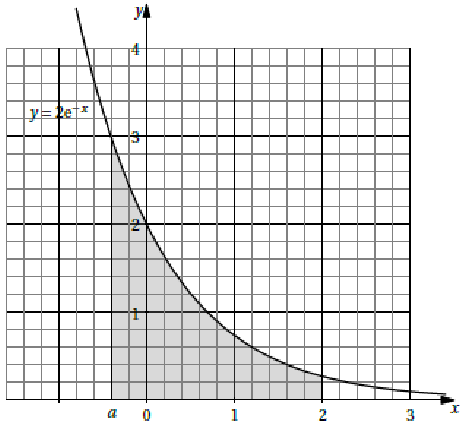
b. $1 < I < 2$

c. $3 < I < 4$

d. $13 < I < 16$



2. Sur le graphique ci-dessous, l'aire grisée est délimitée par la courbe d'équation $y = 2\mathrm{e}^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = 2$, où a est un nombre réel strictement inférieur à 2.



L'aire grisée a une valeur strictement comprise entre 0,5 et 1 unité d'aire lorsque a est égal à :

a. $-0{,}5$

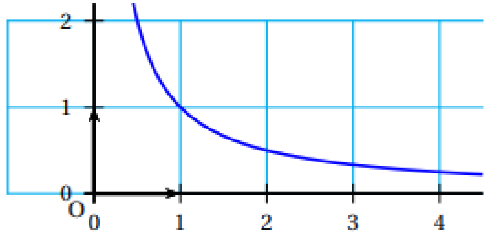
b. 0

c. 0,5

d. 1,5

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



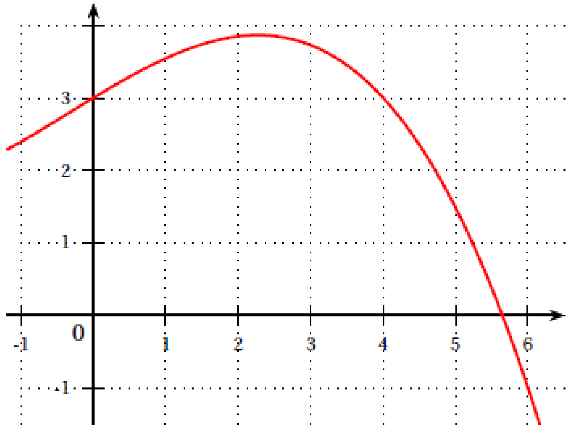
Le domaine du plan défini comme l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ qui vérifient $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $\dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant 1$ a pour aire (exprimée en unité d'aire) :

a. $\ln 2$

b. $\dfrac{1}{2}$

c. $1 - \ln 2$

4. La figure ci-dessous donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. En notant I l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, on a alors, en unités d'aire :



a. $1 < I < 3$ **b.** $0 < I < 9$ **c.** $9 < I < 12$ **d.** $12 < I < 22$

Ex 2 QCM (Tiré de divers sujets de bac)

1. Une primitive de f définie pour $x>0$ par $f(x)=3x+\dfrac{2}{x}$ est la fonction F telle que :

a. $F(x)=3x^2+\ln\left(x^2\right)$ **b.** $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+2\ln(x)$ **c.** $F(x)=3-\dfrac{2}{x^2}$ **d.** $F(x)=6x-2\ln(x)$

2. L'intégrale $\int_1^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A. $\ln 2-1$	**B.** $\frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$
C. $\frac{2-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$	**D.** $1-\ln 2$

3. **Proposition :** la valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ par $f(x)=\cos(x)$ est $-\dfrac{2}{\pi}$. *On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ est donnée par la formule :*

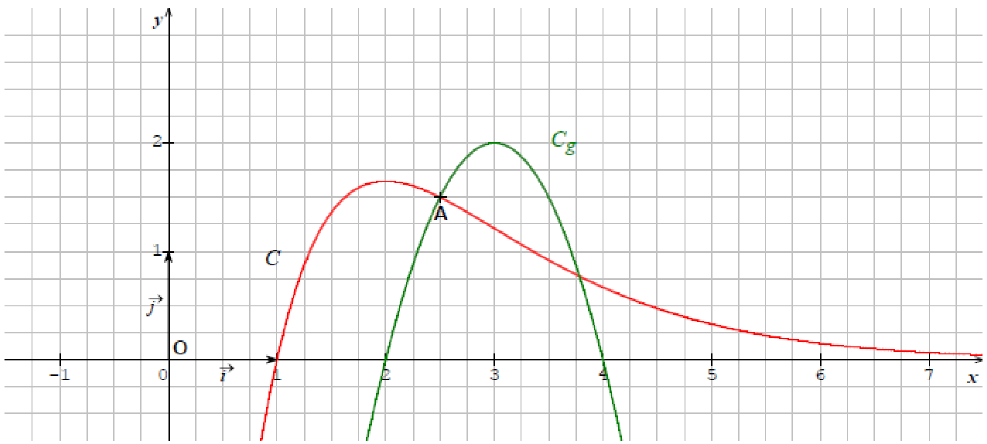
$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Soit G la fonction définie pour tout réel x strictement positif par

$$G(x)=x\ln x-x+2$$

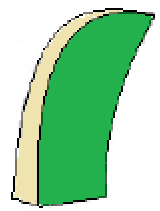
G est une primitive de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

A. $g(x)=x\ln x-1$	**B.** $g(x)=\ln x+2x$
C. $g(x)=1-\frac{x^2}{2}+2x$	**D.** $g(x)=\ln x$



Ex 3 Prothèse auditive (Tiré du Bac Antilles Guyane 2016)

On souhaite déterminer l'aire S en unité d'aire de la surface d'une des faces principales du boîtier plastique de l'appareil auditif schématisé ci-contre.



Une modélisation mathématique a permis de représenter cette surface.

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, cette surface correspond à la partie du plan limitée par :

- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x=1$ et $x=2{,}5$;
- la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)e^{-x+2{,}5}$
- la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g définie par :

pour tout réel x, $g(x)=-2x^2+12x-16$.

1. Sur l'annexe fournie, hachurer la surface décrite précédemment.

Pour déterminer l'aire S de cette surface, on décompose le calcul en deux parties.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $I=\int_2^{2{,}5} g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. On souhaite calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $J=\int_1^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction dont une expression est donnée dans la **partie** C.

a. Vérifier qu'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction définie par :

pour tout réel x, $F(x)=-x\mathrm{e}^{-x+2{,}5}$.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.

4. **a.** Déterminer la valeur exacte de l'aire S en unité d'aire.

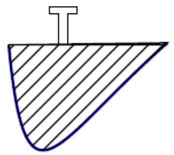
b. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire S en unité d'aire.

Ex 4 Aileron Planche de Surf (Tiré de du bac Nouvelle-Calédonie 2015)

Une entreprise fabriquant des planches de surf conçoit un nouveau modèle d'aileron. Cet aileron est composé de deux parties :

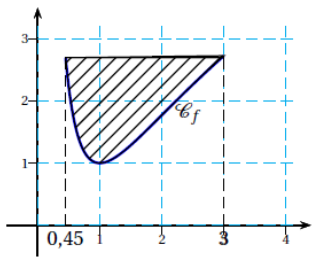
— la partie supérieure ou « boîtier » permettant de fixer l'aileron à la planche,

— la partie inférieure destinée à être immergée dans l'eau.



Pour estimer la quantité de matière nécessaire à la fabrication de la partie inférieure de l'aileron, l'entreprise souhaite connaître le mieux possible l'aire A du domaine hachuré.

Pour modéliser le profil latéral de la partie inférieure on se place dans un repère orthonormé avec une échelle de 1 carreau pour 10 cm et on se propose d'utiliser, pour des abscisses comprises entre 0,45 et 3, la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{a}{x}+b+4\ln(x)$ où a et b sont des constantes réelles qui restent à déterminer.



1. Évaluer l'aire A en nombre entier de carreaux en expliquant votre démarche.
2. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
3. Vérifier que le choix de $a=4$ et $b=-3$ répond au problème posé.
4. Soit la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=(4x+4)\ln(x)-7x$.
   Montrer que F est une primitive de f.
5. Déterminer au cm^2 près une valeur approchée de l'aire A.

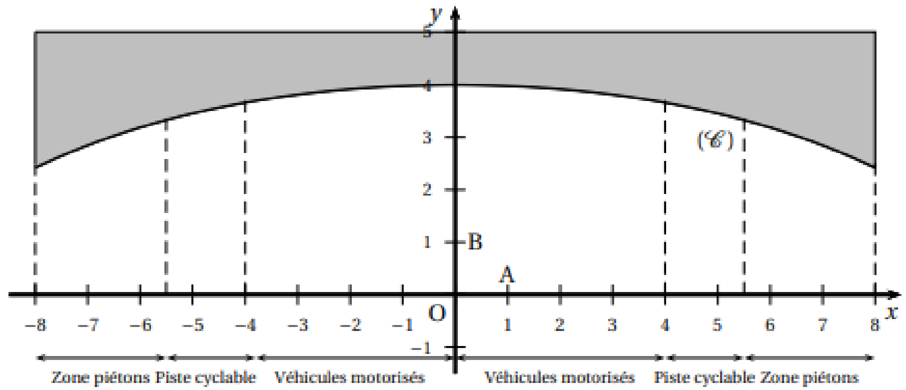
Ex 5 Pont Retour (Tiré du Bac Polynésie 2015)

Un pont à une seule arche d'une longueur de 16 m enjambe une route à double circulation.

La figure ci-dessous donne une vue de l'une des deux façades de ce pont (1 unité représente 1 mètre).

La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 m au-dessus de la route.

La partie de l'axe des abscisses comprise entre -8 et 8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



Soit la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8\,;8]$, par

$$f(x)=5-0{,}5\left(e^{0{,}2x}+e^{-0{,}2x}\right)$$

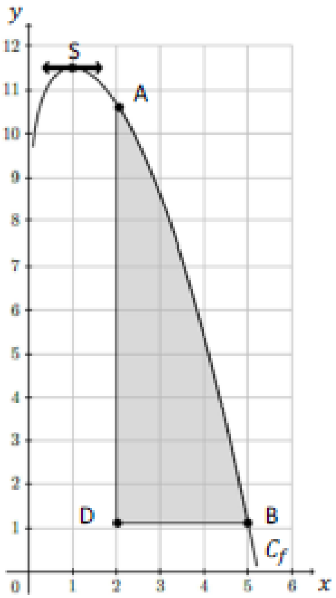
La façade du pont est la partie grisée représentée sur la figure précédente.

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_{-8}^{8}\left(e^{0{,}2x}+e^{-0{,}2x}\right)dx$.
2. Vérifier que l'aire de la façade exprimée en m^2 vaut $5\left(e^{1{,}6}-e^{-1{,}6}\right)$.
3. On veut peindre les deux façades du pont. En déduire l'aire S exprimée en m² de la surface totale à peindre ; en donner une valeur en m² approchée à 10^{-2} près.
4. La peinture utilisée pour peindre les façades du pont est vendue par bidon de 5 litres.
   Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 3 m² par litre, combien de bidons sont nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction ?

Ex 6 Voile d'un bateau (Tiré du Bac Antilles-Guyane 2017)

Dans cet exercice, ln *désigne la fonction logarithme népérien et l'unité de longueur est le mètre* (m).

Un ingénieur prépare un plan pour fabriquer la voile d'un petit bateau.
La voile est représentée en gris dans le repère orthonormé ci-dessous où une unité représente un mètre.



C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0{,}1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 12 + ax^2 + \ln(x)$$

où a est un nombre réel qui sera déterminé dans la partie A.

S est le point de C_f d'abscisse 1.
A est le point de C_f d'abscisse 2.
B est le point de C_f d'abscisse 5.

D est le point d'intersection de la droite d'équation $x = 2$ et de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B.

La voile est représentée par le domaine délimité par le segment [AD], le segment [DB] et la courbe C_f .

Partie A

La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

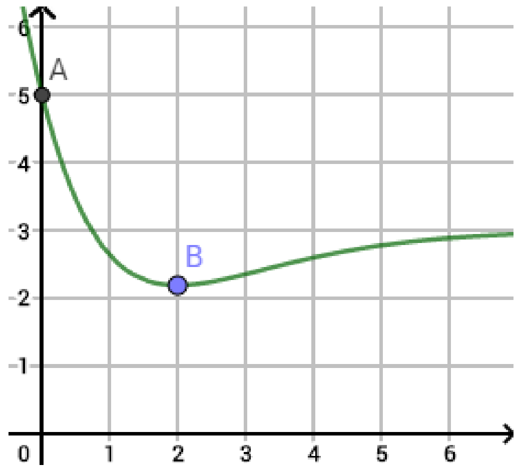
1. On suppose que la tangente à la courbe C_f au point S est horizontale.
   Que vaut $f'(1)$?
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0{,}1\,;+\infty[$.
3. a. Exprimer $f'(1)$ en fonction de a.
   b. Démontrer que $a = -0{,}5$.

Partie B

1. Montrer que la fonction F définie sur $[0{,}1\,;+\infty[$ par $F(x) = 11x - \frac{1}{6}x^3 + x\ln(x)$ est une primitive de f sur $[0{,}1\,;+\infty[$.
2. a. Calculer la valeur exacte, exprimée en unité d'aire, de l'aire du domaine limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 5$.
   b. Vérifier qu'une valeur approchée de cette aire, arrondie au dixième, est 20,2 m^2.

Ex 7 Etude d'une fonction (Tiré du Bac Nouvelle-Calédonie 2014)

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A $(0\,;5)$ et par le point B d' abscisse 2.



PARTIE A : Choisissez la bonne réponse

Un encadrement de $\int_0^2 f(x)\,dx$ par des entiers naturels est :

a. $3 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 4$ **b.** $5 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 7$ **c.** $2 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 5$ **d.** $0 \leqslant \int_0^2 f(x)\,dx \leqslant 2$

PARTIE B

La fonction f représentée dans la PARTIE A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(-x^2 - 2x + 2\right)e^{-x} + 3.$$

1. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est 3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f et on admet que pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(x^2 - 4\right)e^{-x}$.
   a. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$F(x) = \left(x^2 + 4x + 2\right)e^{-x} + 3x.$$
   Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
   a. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.
   b. Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ au centième.

Ex 8 **Etude d'une fonction (Tiré du Bac Antilles-Guyane 2015)**

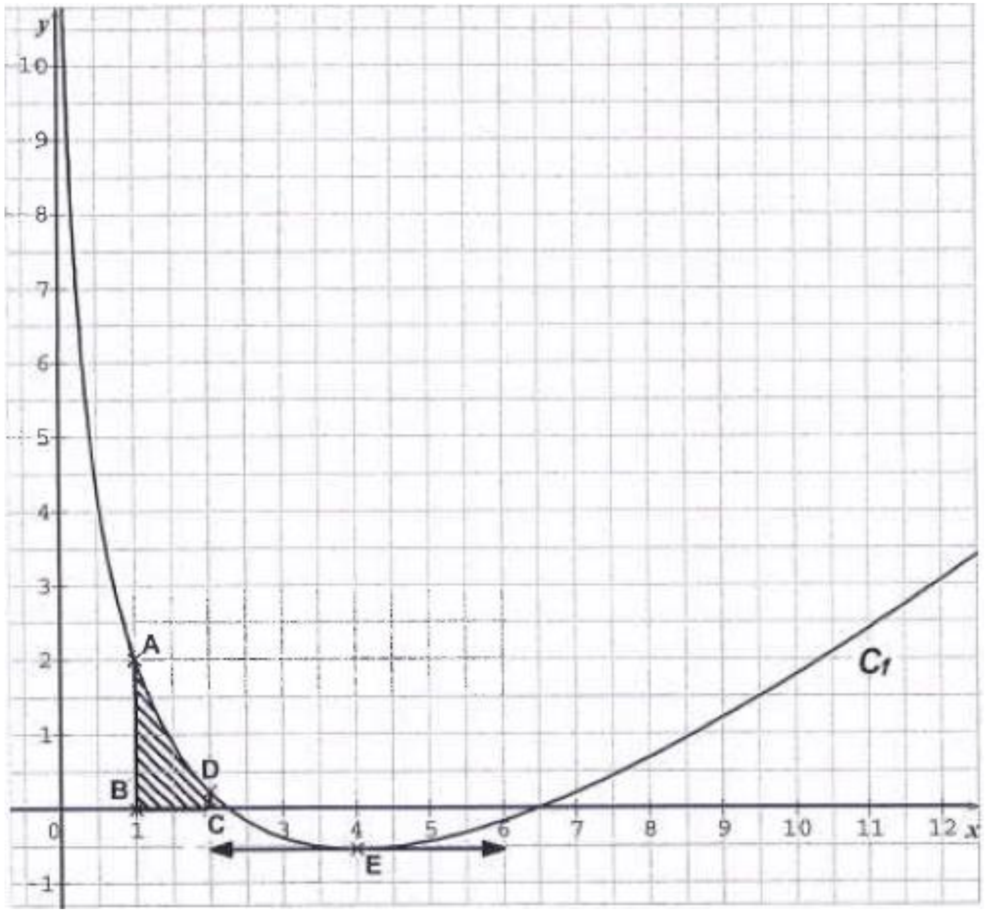
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 4\ln x + 1$

$\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.

Les points A et E sont deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le point A a pour coordonnées (1, 2) et le point E a pour abscisse 4.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E est horizontale.

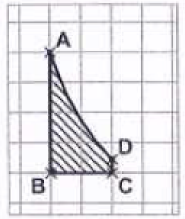


PARTIE A :

1. Déterminer graphiquement $f(4)$ et $f'(4)$
2. Déterminer par le calcul $f(4)$ et $f'(4)$
3. Comment peut-on expliquer les éventuels écarts entre les résultats des questions 1 et 2 ?

PARTIE B :

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.
La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique de la page précédente.
On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.
Le point D est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives (1 , 0) et (2 , 0).



Soit la fonction G définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$G(x) = x\ln(x) - x$$

1. Calculer la dérivée G' de G.
2. En déduire une primitive F de la fonction f donnée dans la partie **B** sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la pièce en unité d'aire ; puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2}.

Ex 9 **Flux d'énergie (Tiré du Bac Métropole 2013)**

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à $22h$. La température y est alors de $20°C$. Le but de cet exercice est de calculer l'énergie dissipée à l'extérieur de cette pièce d'habitation de $22h$ à $7h$ le lendemain matin. On désigne par t le temps écoulé depuis $22h$, exprimé en heures.

Le flux d'énergie dissipée vers l'extérieur, exprimé en kilowatts (kW), est donné par la fonction g telle que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;9]$,

$$g(t) = 0,7\mathrm{e}^{-0,12t}.$$

L'énergie $\mathcal{E}$ ainsi dissipée entre 22 h et 7 h, exprimée en kilowattheures (kWh), s'obtient en calculant l'intégrale

$$\mathcal{E} = \int_0^9 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

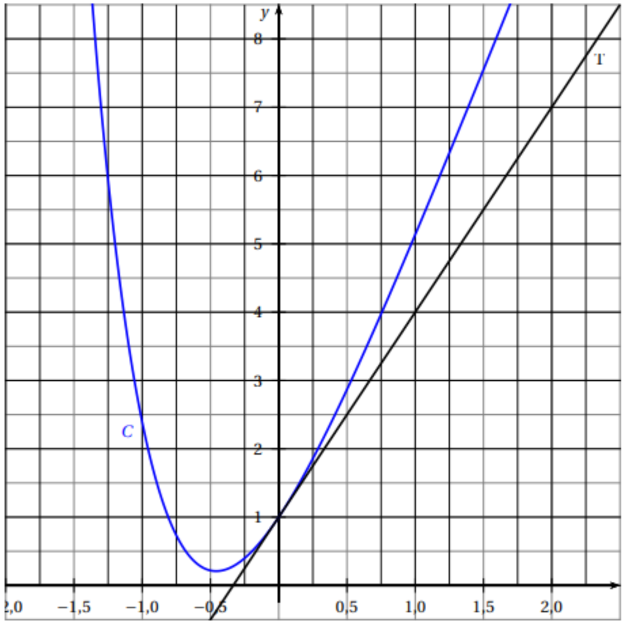
1. Calculer la valeur exacte de l'énergie dissipée.
2. En déduire une valeur arrondie de $\mathcal{E}$ à 0,1 kWh près.

Ex 10 **Etude d'une fonction (Tiré du Bac Polynésie 2016)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = e^{-2x} + 5x$

On a tracé ci-dessous, sa courbe représentative C ainsi que la tangente T à cette courbe au point d'abscisse $x = 0$.

On admet que la courbe C se situe « au-dessus » de la tangente T sur $\mathbb{R}$.



PARTIE A :

1. Déterminer par le calcul $f(0)$ et $f'(0)$
2. En déduire une équation de la droite T

PARTIE B :

L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire A comprise entre la courbe C, la droite T et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1{,}5$.

1. Hachurer sur le dessin, en **ANNEXE 2**, l'aire A que l'on veut déterminer.

2. **a.** Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

pour tout réel x, $g(x) = e^{-2x} + 2x - 1$.

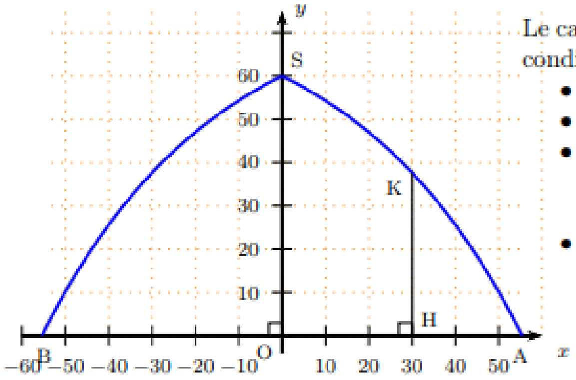
b. Justifier que l'aire A recherchée vaut, en unité d'aire :

$$A = \int_0^{1,5} g(x)\mathrm{d}x.$$

c. En déduire la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de A.

Ex 11 **Hangar (Tiré du Bac Métropole 2013)**

Un architecte veut établir les plans d'un hangar pour ballon dirigeable. La forme de la façade avant de ce hangar et les points O, A, B, S, H et K sont donnés sur le schéma ci-dessous. Cette façade avant est symétrique par rapport au segment vertical [OS] et OH = 30 m. L'arc SA de la façade avant correspond à une partie de la représentation graphique d'une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 60], dans un repère orthonormal direct d'origine O du plan, l'unité étant le mètre



Le cahier des charges impose les quatre conditions suivantes :

- OS = 60 ;
- HK > 35 ;
- la fonction évoquée ci-dessus doit être strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 60] ;
- OA ⩽ 60.

Partie A - Étude d'une fonction numérique

1. Vérifier que la fonction f définie sur $[0\,;60]$ par $f(x) = 80 - 20e^{0,025x}$ vérifie les trois premières conditions du cahier des charges.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale approchée à 10^{-1} près par excès du réel a qui vérifie $f(a) = 0$.
   Vérifier que la quatrième condition du cahier des charges est remplie.

Partie B - Calcul d'intégrale et application

1. (a) La fonction F est définie sur $[0\,;60]$ par $F(x) = 80x - 800e^{0,025x}$.
   Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;60]$.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{55,5} f(x)\,\mathrm{d}x$
   (c) Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près de J.
2. On souhaite peindre la surface extérieure de la façade avant.
   (a) Déterminer à 10^{-2} près l'aire de cette surface exprimée en m^2.
   (b) La peinture utilisée pour peindre la surface extérieure de la façade avant est vendue en bidons de 68 litres. Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 0, 2 mètre carré par litre, combien de bidons sont nécessaires pour peindre la surface extérieure de la façade avant ?