

Chapitre F1 : Limites d'une fonction

1 – Définitions & Interprétation graphique

a. Limite infinie d'une fonction en l'infini

Activité 1 : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ dont on a tracé la courbe représentative ci-contre.

1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x « tend » vers $+\infty$? vers $-\infty$?

Lorsque x « tend » vers $+\infty$, on voit que $f(x)$ devient de plus en plus grand.

Dans ce cas on dit que $f(x)$ « tend » vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Lorsque x « tend » vers $-\infty$, on voit que $f(x)$ devient de plus en plus petit.

Dans ce cas on dit que $f(x)$ « tend » vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

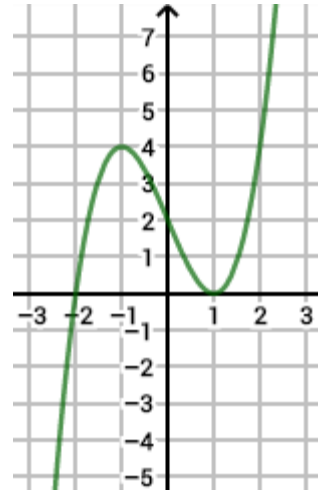
2) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	$\cong -10^{12}$	$\cong -10^9$	$\cong -10^6$	-969	971	999701	$\cong 10^9$	$\cong 10^{12}$

3) Déterminer une valeur de x à partir de laquelle les valeurs de $f(x)$ sont-elles toutes plus grandes que le nombre A :

• $A = 10\,000$: Pour $x \geq 22$

• $A = 100\,000$: Pour $x \geq 47$

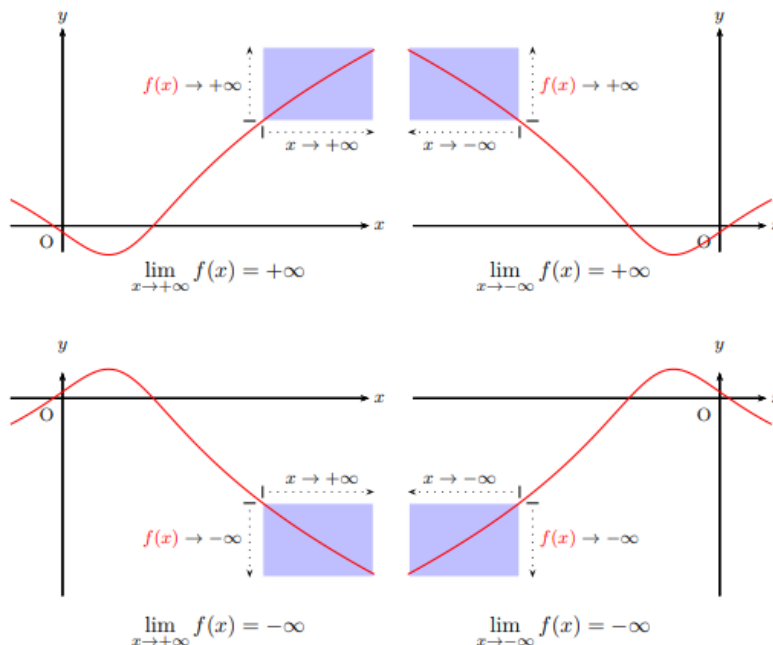


Définition 1 : Soit f une fonction.

• On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si toute intervalle de la forme $[A; +\infty[$, (où A est un nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.

• On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si toute intervalle de la forme $] -\infty; A]$, (où A est un nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.

• On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



b. Limite finie d'une fonction en l'infini, Asymptote horizontale

Activité 2 : On considère la fonction f définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$ dont on a tracé la courbe représentative ci-contre.

1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de -3 ?

Lorsque x « tend » vers $+\infty$ ou $-\infty$, on voit que $f(x)$ se rapproche de 2. On dit que $f(x)$ « tend » vers 2 et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

2) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant :

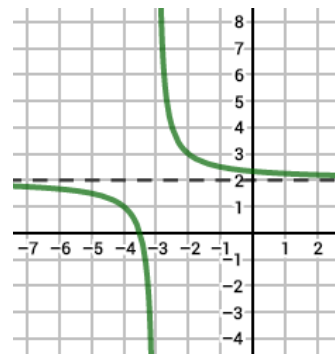
x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	1,9999	1,9990	1,989	1,8571	2,0769	2,0097	2,0010	2,0001

3) Déterminer une valeur de x à partir de laquelle les valeurs de $f(x)$ sont-elles toutes proche de la limite à une distance de ϵ près.

- $\epsilon = 0.01$: Pour $x \geq 98$
- $\epsilon = 0.001$: Pour $x \geq 1050$

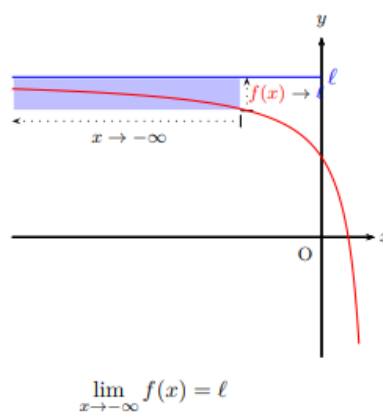
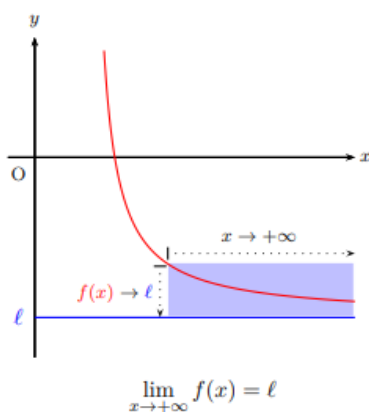
4) Tracer la droite d'équation $y = 2$. Que remarque-t-on ?

Lorsque x « tend » vers $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe et la droite se rapproche de plus en plus. On dit que la droite est une asymptote horizontale à la courbe.



Définition 2 : Soit f une fonction et l un nombre réel.

- On dit que f a pour limite l en $+\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si toute intervalle de la forme $]l - \epsilon; l + \epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
- On dit que f a pour limite l en $-\infty$, et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ si toute intervalle de la forme $]l - \epsilon; l + \epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez petit.



Définition 3 : On dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f en $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque : Certaines fonctions n'ont pas de limites en l'infini.

C'est le cas par exemple des fonctions cosinus et sinus.



c. Limite infinie d'une fonction en un point, Asymptote verticale

Activité 3 : On reprend la fonction f définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$.

1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de -3 ?

Lorsque x se rapproche de -3 par la gauche on voit que $f(x)$ tend vers $-\infty$.

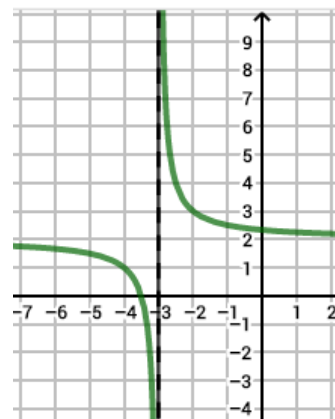
On note $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$

Lorsque x se rapproche de -3 par la droite on voit que $f(x)$ tend vers $+\infty$.

On note $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$

2) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3,1	-3,01	-3,001	-3,0001	-2,9999	-2,999	-2,99	-2,9
$f(x)$	-8	-98	-998	-9998	10002	1002	102	12



3) Déterminer à quelle distance ϵ doit-on se trouver de -3 pour que toutes les valeurs de $f(x)$ soit :

- Supérieures à $A = 1000$: $\epsilon = 0.001$ à droite de -3
- Inférieures à $A = -90$: $\epsilon = 0.01$ à gauche de -3

4) Tracer la droite d'équation $x = -3$. Que remarque-t-on ?

Lorsque x « tend » vers -3 , la courbe et la droite se rapproche de plus en plus. On dit que la droite est une asymptote verticale à la courbe.

Définition 4 : Soit f une fonction et a un nombre réel.

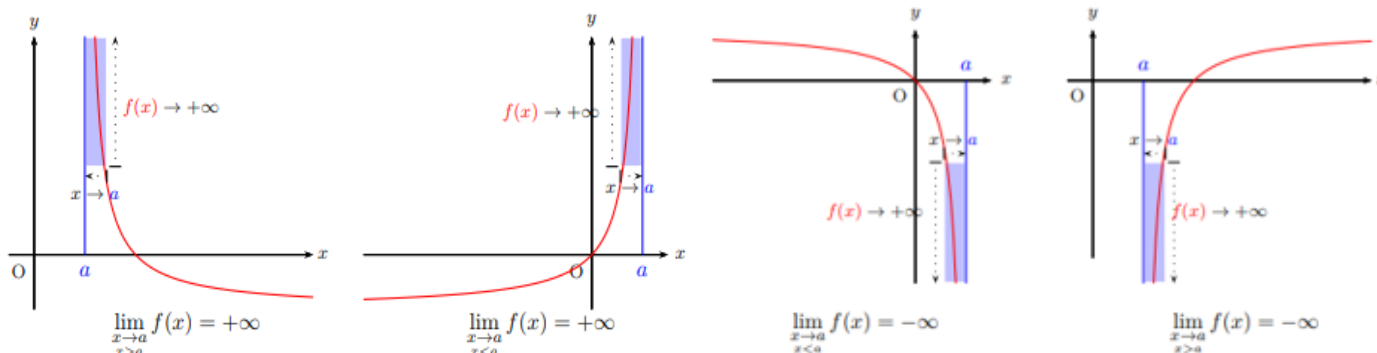
• On dit que f a pour limite $+\infty$ en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si toute intervalle de la forme $[A; +\infty[$, (où A est un nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a .

• On dit que f a pour limite $-\infty$ en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si toute intervalle de la forme $]-\infty; A]$, (où A est un nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a .

Remarque : La limite d'une fonction en un point n'est pas toujours unique. Dans ce cas on doit préciser :

• Si on s'approche de a par valeurs inférieures : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

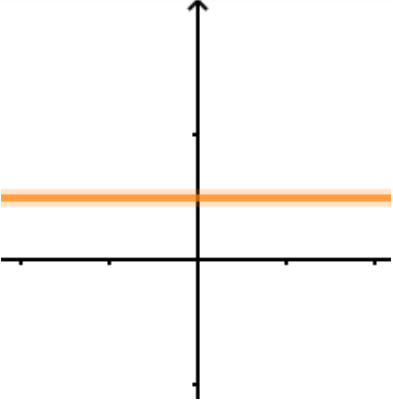
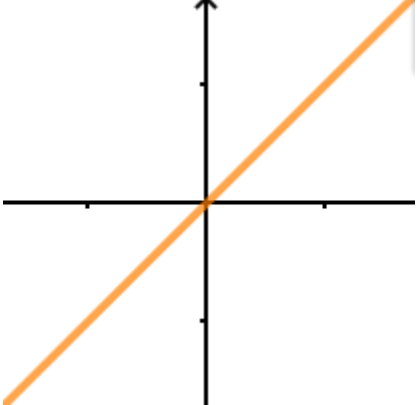
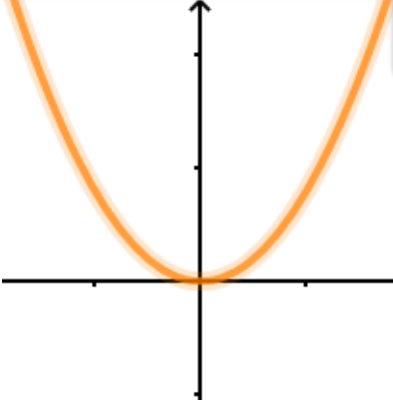
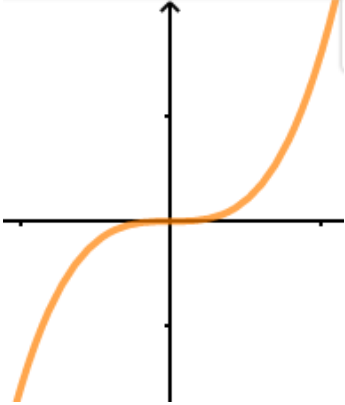
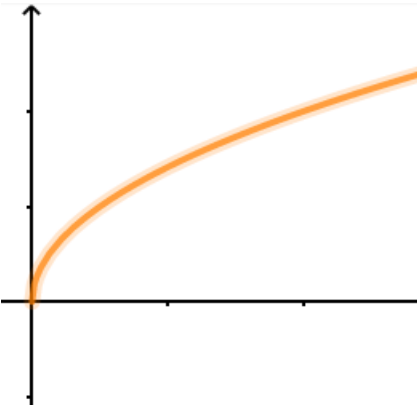
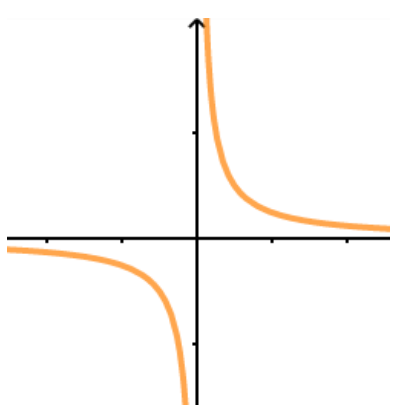
• Si on s'approche de a par valeurs supérieures : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.



Définition 5 : On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f .



2 – Limites des fonctions de références

<p>Fonction constante $f(x) = k$ (où k est un réel)</p>  <p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ </p>	<p>Fonction identité $f(x) = x$</p>  <p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ </p>	<p>Fonction carré $f(x) = x^2$</p>  <p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ </p>
<p>Fonction cube $f(x) = x^3$</p>  <p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ </p>	<p>Fonction racine carré $f(x) = \sqrt{x}$</p>  <p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ </p>	<p>Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$</p>  <p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ </p>

Remarque : Plus généralement les fonctions puissances $f(x) = x^n$ ont mêmes limites que :

- La fonction carré si n est **pair**.
- La fonction cube si n est **impair**.



3 – Opérations sur les limites

Pour calculer la limite d'une fonction plus complexe on utilise les tableaux suivants. F.I. signifie « Forme Indéterminée », c'est-à-dire une limite que l'on ne peut pas calculer en utilisant une opération élémentaire. Il est toutefois parfois possible de « lever » l'indétermination.

a. Limite d'une somme

$l \backslash l'$	réel	$+\infty$	$-\infty$
réel	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

b. Limite d'un produit

$l \backslash l'$	zéro	réel non nul	∞
zéro	0	0	F.I.
réel non nul	0	$l \times l'$	∞^1
∞	F.I.	∞^1	∞^1

¹ Pour déterminer le signe de ∞ on utilise la règle des signes.

Conséquence : Soit k un réel non nul et f une fonction.

- Si $\lim u(x) = l$ alors $\lim k \times u(x) = k \times l$
- Si $\lim u(x) = \pm\infty$ alors $\lim k \times u(x) = \pm\infty$

c. Limite d'un quotient

$l \backslash l'$	zéro ²	réel non nul	∞
zéro	F.I.	0	0
réel non nul	∞^2	$\frac{l}{l'}$	0
∞	∞^2	∞^2	F.I.

² Pour déterminer le signe de ∞ on utilise la règle des signes.

d. Limite d'une puissance

Propriété 1: Soit n un entier naturel non nul et u une fonction.

- Si $\lim u(x) = l$ alors $\lim u^n(x) = l^n$.
- Si $\lim u(x) = +\infty$ alors $\lim u^n(x) = +\infty$.
- Si $\lim u(x) = -\infty$ alors

$$\lim u^n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exemple 1 :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2) = F.I.$

Exemple 2 :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) \times \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5) \times x^2 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x} = FI$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \times \frac{1}{x} = 0^-$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4\sqrt{x} + 1 = -\infty$

Exemple 3 :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{3} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x+2} = FI$

Exemple 4 :

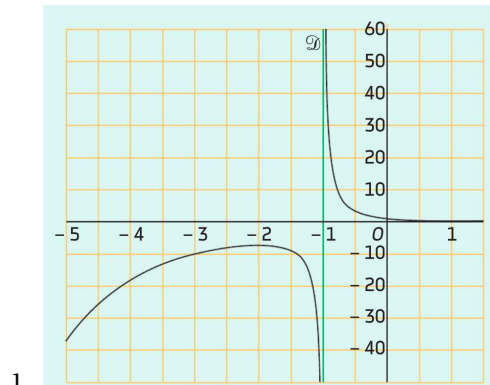
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(5 + \frac{1}{x}\right)^4 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x)^3 = -\infty$



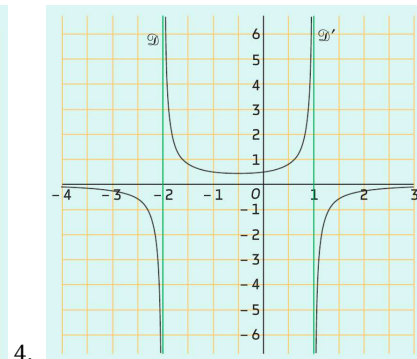
Exercice 1 (Lecture graphique de limites)

Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction f ainsi que les éventuelles droites asymptotes. En déduire :

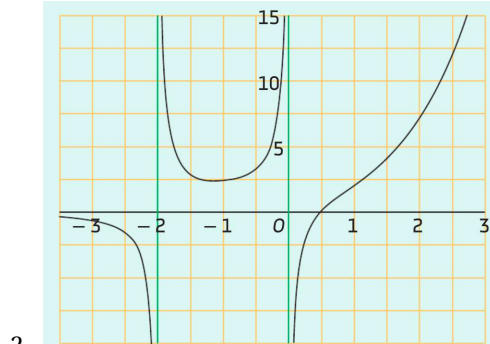
- sur quel intervalle f est définie ;
- les limites aux bornes de l'ensemble de définition.



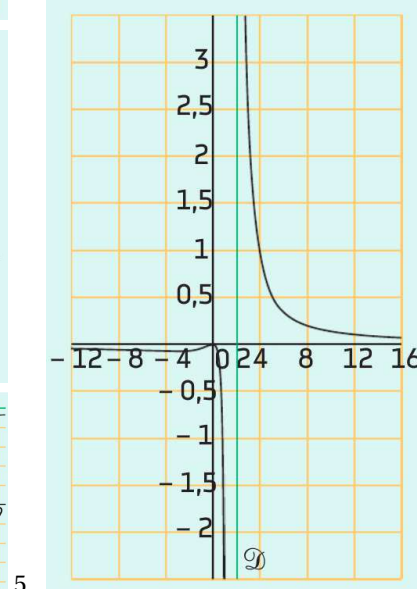
1.



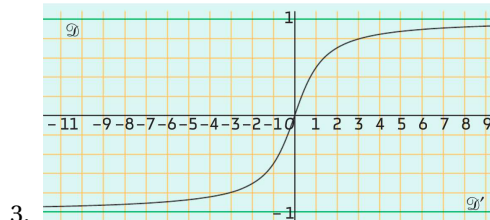
4.



2.



5.

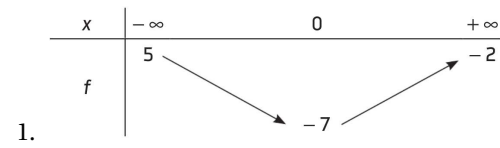


3.

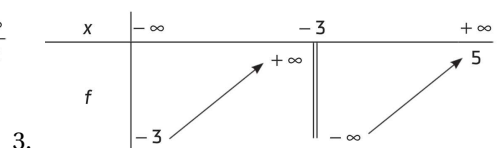
Exercice 2 (Lecture de tableaux de variation)

Dans chacun des cas suivants, on donne le tableau de variation d'une fonction f . En déduire :

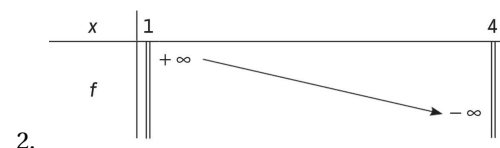
- sur quel intervalle la fonction f est définie ;
- les limites de f aux bornes de cet intervalle de définition ;
- une interprétation graphique éventuelle de ces limites ;
- l'allure possible de la courbe représentative de f .



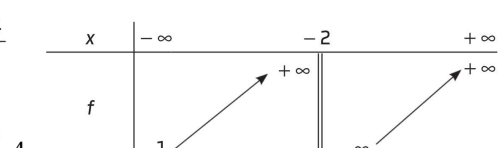
1.



3.



2.



4.

Exercice 3 (Interprétation graphique d'une limite)

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction f . Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$.

Exercice 1 (Calcul de limites)

Déterminer les limites suivantes puis en déduire l'existence ou non d'une asymptote horizontale ou verticale.

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 + 5$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - 1 + \cos x$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1)^2$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2$ | 8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + x - 1$ | 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x + 3$ | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + x^2 + \ln x$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1$ | 16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-3)^3$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2$ | 11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x^2+1}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x^2$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 3^-} -\frac{1}{x-3}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1)$ | 18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 4$ |

Exercice 2 (Forme indéterminée : cas d'une somme)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + x$.

- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - Mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$.
 - En déduire la limite de f en $-\infty$.

Exercice 3 (Forme indéterminée : cas d'un quotient)

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$.

- Déterminer la limite de f en 1.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Mettre x^2 en facteur au numérateur et au dénominateur dans $f(x)$.
 - En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4 (68 p 67 Maths STI2D Hachette - Détermination d'une fonction)

Soit f une fonction définie et dérivables sur $] -2; +\infty[$ dont on donne ci-contre le tableau de variations. On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(0, I, J)$ d'unité graphique 1 cm.

x	-2	$+\infty$
f	$+\infty$	-5

On sait que :

- il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout x de $] -2; +\infty[$, $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$;
 - la courbe \mathcal{C} passe par l'origine du repère.
- (a) Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite \mathcal{D} asymptote verticale à \mathcal{C} . Donner une équation de \mathcal{D} .
(b) En déduire la valeur de c
 - (a) Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite \mathcal{D}' asymptote horizontale à \mathcal{C} . Donner une équation de \mathcal{D}' .
(b) En déduire la valeur de a .
 - Déterminer enfin la valeur de b et donner une expression explicite de $f(x)$.

Exercice 5 (74 p 69 Maths STI2D Hachette - Un exemple d'asymptote oblique)

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$. On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère (O, I, J) orthogonal d'unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

- (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
(b) En déduire que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote dont on précisera une équation.
- (a) Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$.
(b) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$. Établir alors le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites.
- (a) Construire la courbe \mathcal{C} dans le repère (O, I, J) . (Placer avec précision les points d'abscisses respectives 0,5 ; 1 ; 2 et 3.)
(b) Sur le même graphique, construire la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x + 1$. Que constate-t-on graphiquement sur la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} pour les « grandes » valeurs de x ?
- Pour tout réel x de $]0; +\infty[$, on pose $g(x) = f(x) - (2x + 1)$.
(a) Déterminer une expression la plus simple possible de $g(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
(b) Préciser le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
(c) La courbe \mathcal{C} est-elle située au-dessus ou en dessous de la droite \mathcal{D} ? Justifier à l'aide du signe de $g(x)$.
(d) Déterminer la limite de g en $+\infty$. Que peut-on en déduire sur l'écart « vertical » entre la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} quand x devient de plus en plus grand ? (On dit que la droite \mathcal{D} est une asymptote oblique de la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.)