Activités d'approche

Activité 1 Multiplier, c'est additionner !

John Neper (ou Napier) est un savant écossais du XVIe siècle qui travailla notamment à simplifier les calculs en astronomie. Les mesures astronomiques étaient alors nécessaires aux navigateurs. Elles impliquaient des calculs longs et fastidieux.
Neper chercha à créer un outil, sous la forme d'une table numérique à deux colonnes, permettant qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite.
Un extrait de la première table de ce type, publiée par John Neper en 1614, est donné ci-contre.

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,693 1
3	1,098 6
4	1,386 3
5	1,609 4
6	1,791 8
7	1,945 9
8	
9	2,197 2
10	2,302 6
11	2,397 9
12	2,484 9
13	2,564 9
14	2,639 1
15	
16	2,772 6
17	2,833 2
18	
19	
20	
100	

Ainsi, à la multiplication 2×3 correspond 1,791 8, soit la somme des deux nombres de la colonne de droite 0,693 1 et 1,098 6.

1. Vérifier sur d'autres exemples la propriété inventée par Neper.
2. Quel nombre doit-on mettre en face de 8 ? de 15 ? de 18 ?
3. Quel nombre doit-on mettre en face de 1 ?
4. Peut-on compléter ainsi toutes les cases de la colonne de droite ?

Activité 2 Quand l'image d'un produit est la somme des images

Pour répondre à la problématique de John Neper, on recherche une fonction f qui transforme le produit de deux nombres strictement positifs a et b en la somme des images de a et b.
On cherche donc une fonction f définie sur $]0;+\infty[$, qui vérifie la relation fonctionnelle :

$$(E): f(a \times b) = f(a) + f(b)$$

1) Montrer que si f vérifie la relation (E) alors on a $f(1) = 0$.
2) On suppose maintenant que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   On fixe le nombre a dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Pour tout $x > 0$, on a donc la relation suivante :
   $$f(ax) = f(a) + f(x)$$
   a. Montrer que la dérivée de f vérifie la relation :
   $$af'(ax) = f'(x)$$
   b. Ecrire la relation précédente pour $x = 1$ puis en déduire que, pour tout $a \in]0;+\infty[$, on $f'(a) = \frac{k}{a}$ où k est une constante dont on précisera la valeur
3) On impose comme condition supplémentaire $f'(1) = 1$
   Quelle est alors la dérivée f' de f ?

<u>Conclusion</u> :
On a montré que si f est une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant (E) alors sa dérivée est forcément sous la forme :

$$f'(x) = \frac{k}{x}\text{, où } k \text{ est une constante.}$$

On admet qu'il existe qu'une seule solution de l'équation (E) dont la dérivée est $f'(x) = \frac{1}{x}$.
Cette fonction est appelée **logarithme népérien** de x
Elle est notée $\ln(x)$

1 – La fonction logarithme népérien

Définition 1 : On appelle **logarithme népérien** l'unique fonction, notée $\ln(x)$, définie sur $]0;+\infty[$, vérifiant :

- $\ln$ s'annule en 1 : $\ln(1) = 0$
- $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque : Pour calculer la valeur d'un logarithme on utilise la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice :

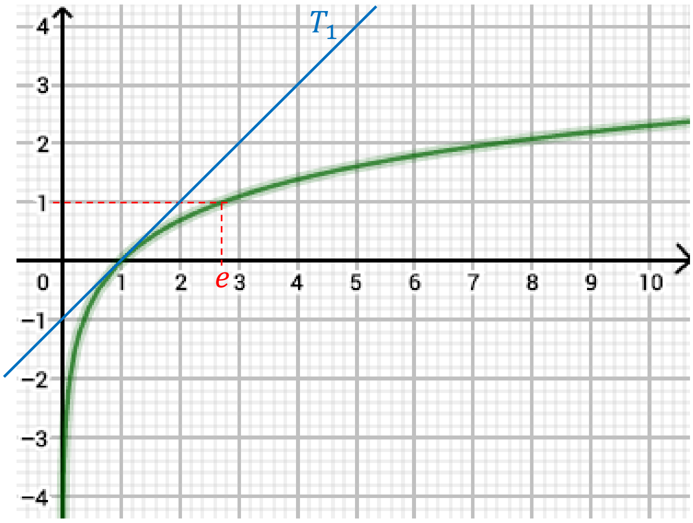
Exemple 1 : Calculer l'image des nombres suivants par la fonction logarithme népérien.

- $\ln(2) = 0.69$ • $\ln(3) = 1.09$ • $\ln(10) = 2.30$ • $\ln(0.2) = -1.61$

Tableau de valeurs : A l'aide de la calculatrice on peut compléter le tableau suivant (arrondir à 10^{-2} près).

x	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(x)$	-2.3	-0.69	0	0.69	1.1	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.2	2.3

Courbe représentative :



Limites :

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ (très lentement : $ln\ 10^{10} \approx 23$)

Asymptotes :

- Verticale : $x = 0$ (axe des ordonnées)
- Horizontale : Aucune

Tangente : Equation de T_1

$T_1 : y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$.

$T_1 : y = x - 1$

$\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$\ln\ (1) = 0$

Tableau de variation :

x	0		1	e	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\ln\ (x)$	‖ $-\infty$	↗	0	1 ↗	$+\infty$

Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$\ln\ (x)$	‖	$-$	0	$+$	

Extremums :

Pas de Maximum, pas de minimum

Définition 2 : On note e l'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$ $i.e.$ tel que $\ln(e) = 1$. On a : $e \approx 2.718$

Propriété 1 : Soient x et y deux nombres strictement positif alors on a :

- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ • $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$ • $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ • $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ • $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Exemple 2 : Résoudre les équations/inéquations suivantes :

- $\ln(x+2) = 1 \Leftrightarrow \ln(x+2) = \ln(e) \Leftrightarrow x + 2 = e \Leftrightarrow x = e - 2 \approx 0.718$ donc $S = \{e - 2\}$.
- $\ln(3-x) > 0 \Leftrightarrow 3 - x > 1 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$ donc $S =]-\infty; 2[$.

2 – Propriétés algébriques

Propriété 2 (Relation fonctionnelle) : Pour tous nombres strictement positifs a et b, on a :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exemple 3 : A l'aide du tableau de valeur et sans utiliser la calculatrice, calculer les valeurs suivantes :

- $\ln(15) = \ln(3 \times 5) = \ln(3) + \ln(5) \approx 1{,}1 + 1{,}61 = 2{,}72$
- $\ln(0.8) = \ln(8 \times 0.1) = \ln(8) + \ln(0.1) \approx 2.08 - 2.3 = -0.22$

Les deux propriétés suivantes sont des corollaires (ou conséquences) de la relation fonctionnelle :

Propriété 3 : Pour tous nombres strictement positifs a et b, on a :

(1) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ (2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Démonstration :

(1) Pour tout $a > 0$, on a $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1)$ d'où $\ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) = 0$. On obtient donc $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.

(2) Pour tous $a, b > 0$, on a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ (d'après (1))

Exemple 4 : A l'aide du tableau de valeur et sans utiliser la calculatrice, calculer les valeurs suivantes

- $\ln(0.25) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln(4) \approx -1.39$
- $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(2) - \ln(3) \approx 0.69 - 1.1 = -0.31$

Propriété 4 : Pour tout nombre strictement positif a et pour tout entier naturel n :

(1) $\ln(a^n) = n\ln(a)$ (2) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration : Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

(1) $\ln(a^n) = \ln\left(\underbrace{a \times \dots \times a}_{n-fois}\right) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n-fois} = n \times \ln(a)$

(2) On $\ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$ d'où $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$ d'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemple 5 : A l'aide du tableau de valeur et sans utiliser la calculatrice, calculer les valeurs suivantes

- $\ln(1024) = \ln(2^{10}) = 10\ln(2) \approx 6.9$
- $\ln(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\ln(5) \approx \frac{1}{2} \times 1.61 \approx 0.8$

Application : La propriété précédente permet de résoudre des inéquations de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ où l'inconnue n est en puissance (avec $q > 0$ et $a > 0$)

Exemple 6 : Résoudre les équations/inéquations suivantes :

- $2^n \geq 350 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(350) \Leftrightarrow n \times \ln(2) \geq \ln(350) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(350)}{\ln(2)} \approx 8.5$. Donc $n \geq 9$
- $1.64^n \leq 8 \Leftrightarrow \ln(1.64^n) \leq \ln(8) \Leftrightarrow n\ln(1.64) \leq \ln(8) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 8}{\ln 1.64} \approx 4.5$. Donc $n \leq 4$
- $0.8^n > 0.25 \Leftrightarrow \ln(0.8^n) > \ln(0.25) \Leftrightarrow n\ln(0.8) > \ln(0.25) \Leftrightarrow n < \frac{\ln 0.25}{\ln 0.8} \approx 6.2$. Donc $n < 6$
  Attention : $\ln 0.8 < 0$ car $0.8 < 1$ donc on divise par un nombre négatif et l'inéquation change de sens.

3 – Fonction de la forme $ln\ (u)$

On considère une fonction u, définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I

On s'intéresse dans ce paragraphe aux fonctions de la forme $f(x) = \ln(u(x))$

Propriété 5 : La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a $\ln' u = \frac{u'}{u}$

Exemple 7 : On considère la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Calculer la dérivée f' de f.

$f = \ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et donc $u'(x) = 2x$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1}$.

Propriété 6 : Pour déterminer les limites de la fonction $\ln u$ on utilise les deux règles suivantes :

(1) « $\ln(0) = -\infty$ » (2) « $\ln(+\infty) = +\infty$ »

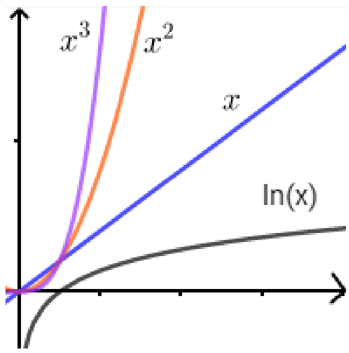
Exemple 8 : On considère la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ définie sur $]2; +\infty[$. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim_{x\to 2} x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$ et « $\ln(0) = -\infty$ » donc $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^2 - 4 = (+\infty)^2 - 4 = +\infty - 4 = +\infty$ et « $\ln(+\infty) = +\infty$ » donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

4 – Croissance comparée

Lorsque x tend vers $+\infty$ les fonctions $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^n$ tendent vers $+\infty$ mais à des vitesses différentes : La fonction $\ln(x)$ tend très lentement vers $+\infty$, par rapport aux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^n$.

Ainsi, lorsque x tend vers $+\infty$, les quotients $\frac{\ln x}{x}$ et $\frac{\ln x}{x^n}$ vont prendre des valeurs de plus en plus petites car le numérateur sera de plus en plus petit par rapport au dénominateur :



x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^{10}
$\frac{\ln x}{x}$	0.2302	0.0461	0.0069	0.0009	1.2×10^{-4}	2.3×10^{-9}

Propriété 6 (Croissance comparées) : On a les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (où n entier naturel non nul)

Remarque : Cette propriété est souvent utilisée pour lever certaines formes indéterminées.

Exemple 9 : Calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}$ $\quad (F.I :\ll \frac{\infty}{\infty} \gg)$

- $\frac{\ln x}{x^2+1} = \frac{\ln x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
- Or $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)} = \frac{1}{1+0} = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ (d'après (1))
- Donc $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} = 0 \times 1 = 0$

5 – Logarithmes en d'autres bases

a. Logarithme décimal

Définition 3 : On appelle **logarithme décimal** la fonction, notée $\log(x)$, définie sur $]0;+\infty[$, par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Exemple 10 : Calculer (sans calculatrice) l'image des nombres suivants par la fonction logarithme décimal.

• $\log(1) = 0$ • $\log(10) = 1$ • $\log(100) = 2$ • $\ln(1000) = 3$

Propriété 7 : Pour tout entier naturel n, on a $\log(10^n) = n$

Remarque : Pour calculer la valeur d'un logarithme décimal on utilise la touche $\boxed{\log}$ de la calculatrice

b. Logarithme en base 2

Définition 4 : On appelle **logarithme en base 2** la fonction, notée $\log_2(x)$, définie sur $]0;+\infty[$, par :

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Exemple 10 : Calculer (sans calculatrice) l'image des nombres suivants par la fonction logarithme en base 2.

• $\log_2(1) = 0$ • $\log_2(2) = 1$ • $\log_2(4) = 2$ • $\log_2(8) = 3$

Propriété 8 : Pour tout entier naturel n, on a $\log_2(2^n) = n$

c. Logarithme en base a quelconque

• On peut définir de la même manière une fonction logarithme en n'importe quelle base a :

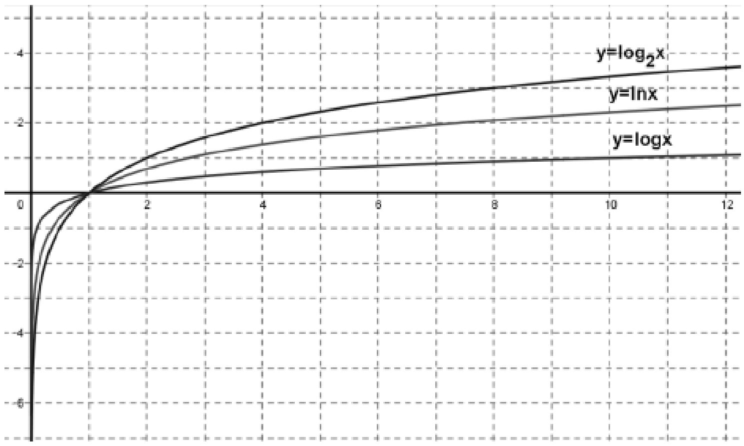
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \text{ définie sur }]0;+\infty[$$

Cette fonction vérifiera alors $\log_a(a^n) = n$ pour tout entier naturel n.

• Le logarithme népérien correspond alors au logarithme de base $a = e$: $\ln(x) = \log_e(x)$

On a donc $ln(e^n) = n$ pour tout entier naturel n.

• Toutes les fonctions logarithmes, quelques soit leur base, possèdent les mêmes propriétés algébriques et analytiques (sens de variation, signe, limites) que la fonction logarithme népérien.



Logarithmes – Fiche d'exercices

Exercice 1 (Propriétés du logarithme - numérique)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(6) - \ln(2)$
2. $\ln(3) - \ln(9)$
3. $\ln(2) + \ln(4) - \ln(8)$
4. $\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
5. $\frac{1}{4}\ln(81)$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ln\left(\sqrt{3}\right)$
7. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$

Exercice 2 (Propriétés du logarithme - numérique - bis)

Donner, en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ les valeurs de :

1. $\ln(10)$
2. $\ln(25)$
3. $\ln(16)$
4. $\ln(400)$
5. $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
6. $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
7. $\ln(0,4)$
8. $\ln\left(\sqrt{5}\right)$
9. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
10. $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$

Exercice 3 (Avec le nombre d'Euler...)

Donner la valeur numérique des nombres ci-dessous :

1. $\ln e^2$
2. $\ln \frac{1}{e}$
3. $\ln \sqrt{e}$
4. $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$
5. $2\ln e^3$
6. $\ln e^2 + \ln \frac{1}{e^4}$

Exercice 4 (Propriétés du logarithme - algébrique)

x et y étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de $\ln(x)$ et de $\ln(y)$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)$
2. $\ln\left(x^3 \times y^5\right)$
3. $\ln\left(xy^3\right)$
4. $\ln\left(\frac{y^2}{x^3}\right)$
5. $\frac{\ln(x)}{\ln\left(xy^2\right)}$

Exercice 5 (Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$)

Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur I par :

1. $f(x) = 3\ln x + x$; $I =]0, +\infty[$
2. $f(x) = (x+1)\ln x$; $I =]0, +\infty[$
3. $f(x) = x^3 - 2\ln x$; $I =]0, +\infty[$
4. $f(x) = (\ln x)^5$; $I =]0, +\infty[$
5. $f(x) = 2 - \frac{1}{\ln x}$; $I =]0, 1[$
6. $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$; $I =]0, +\infty[$
7. $f(x) = \frac{3\ln x + 1}{\ln x}$; $I =]1, +\infty[$

Exercice 5 (Dérivée d'une fonction du type $u \mapsto \ln(u)$)

Calculer la fonction dérivée des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \ln(x+1)$ sur $]-1, +\infty[$
2. $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$ sur $]-\infty, -1[$

Exercice 6 (Limites d'une fonction du type $u \mapsto \ln(u)$)

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f :

1. $f(x) = \ln(x-2)$ sur $]2, +\infty[$
2. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$
3. $f(x) = \ln(x) - 2$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 7 (Équations comportant un logarithme)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+3) = \ln(4-x)$
2. $\ln(x) = -3$
3. $\ln(x+1) = 7$
4. $\ln(x) = 2$
5. $\ln(2x-1) = \ln(4-x)$
6. $\ln(3x-9) = 0$

Exercice 8 (Inéquations comportant un logarithme)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+2) \leq 0$
2. $\ln(x-3) \geq 0$
3. $\ln(x) + 2 \leq 0$
4. $\ln(x) - 3 \geq 0$
5. $\ln(2x-5) + \ln(x) = \ln(3)$
6. $2\ln(x+1) - \ln(4x+4) = -\ln(2)$

Exercice 9 **(Inequation avec l'inconnu en puissance)**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $1.5^n \geq 250$ 2. $0.99^n < 0.1$ 3. $50 \times 0.8^n > 20$

Exercice 10 **(Retour sur les suites géométriques)**

1. Lors d'une expédition en montagne, on utilise un butagaz pour chauffer l'eau d'un torrent. La température de l'eau du torrent est de $12°C$ et on admet que le butagaz permet d'augmenter la température de l'eau de 15% chaque minute. Combien de temps (en minutes entières) faudra-t-il attendre pour que l'eau bout ?

2. Un bassin contient 1000 L. On observe que la quantité d'eau diminue chaque jour de 5%. Au bout de combien de jour la quantité d'eau dans le bassin aura diminué de moitié ?

Ex 11 QCM (Tiré de divers Sujets de Bac)

1. $\ln(128)$ est égal à :

a. $\ln(2)+\ln(7)$ **b.** $7\ln(2)$ **c.** $2\ln(14)$ **d.** $\ln(120)+\ln(8)$.

2. Pour tout réel a strictement positif, $\ln a + \ln 2a$ est égal à :

a. $\ln(3a)$ **b.** $3\ln a$
c. $\ln(2a^2)$ **d.** $2\ln(a^2)$

3. L'équation $\ln(x-2) = -2$ admet pour solution dans $\mathbf{R}$:
a. 0
b. $2+e^{-2}$
c. $2{,}14$
d. $2-e^2$

4. Si f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - \ln x$, alors :

A. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$	**B.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
C. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$	**D.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2$

5. La fonction g est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = (-2x+1)\ln(x)+5$.
La limite de cette fonction g en $+\infty$ est égale à :

a. $+\infty$
b. $-\infty$
c. 0
d. 5

Ex 12 Etude de Fonction 1 (Tiré du Bac Antilles-Guyanne 2013)

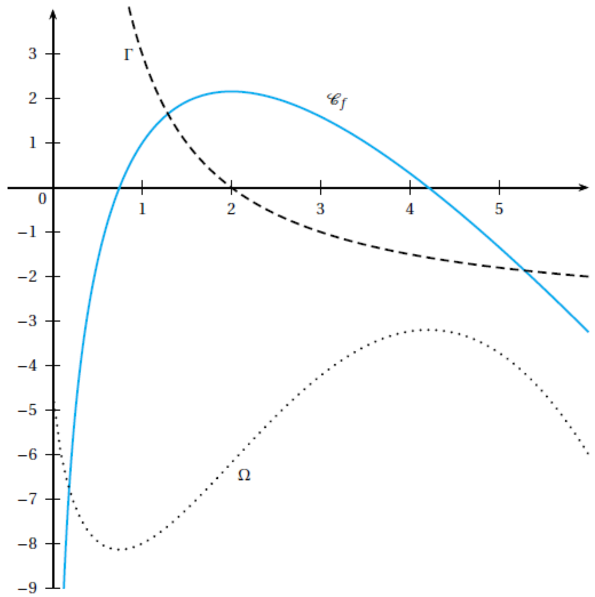
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 6\ln x + ax + b$$

où a et b sont des constantes réelles,
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Le point $A(1\,;1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.
$\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ (trait plein) ainsi que les courbes Γ et Ω.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f'



1. Indiquer laquelle des deux courbes est la représentation graphique de **f'**
2. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de a.
4. À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

$$f(x) = 6\ln x - 3x + 4.$$

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathscr{C}_f$ fournie dans la partie A.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.

2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$.

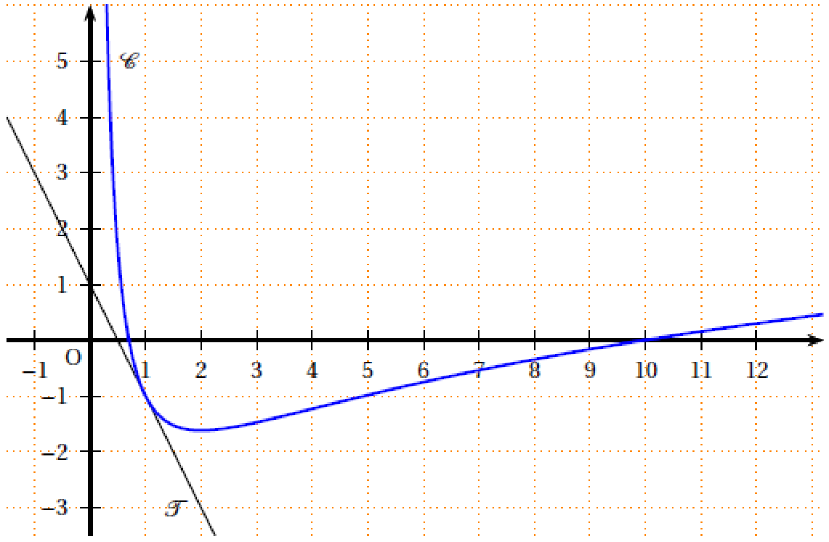
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner les variations de la fonction f.

4. En déduire que la fonction f admet un extremum dont on calculera la valeur exacte.

Ex 13 Etude de Fonction 2 (Tiré du Bac Nouvelle Calédonie 2013)

PARTIE A :

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
f' désigne la fonction dérivée de f.



$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
$\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;\,-1)$.
$\mathscr{T}$ passe par le point de coordonnées $(0;1)$.

1. **a.** Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.
   b. Déterminer $f'(1)$.
   c. Donner une équation de $\mathscr{T}$.
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Déterminer alors les valeurs de a et b.

PARTIE B :

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2\ln x + \frac{4}{x} - 5.$$

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. **a.** Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, vérifier que

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Établir le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.
5. **a.** Donner le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[1\,;\,3]$.

Ex 14 Etude de Fonction 3 (Tiré du Bac Antilles Guyane 2015)

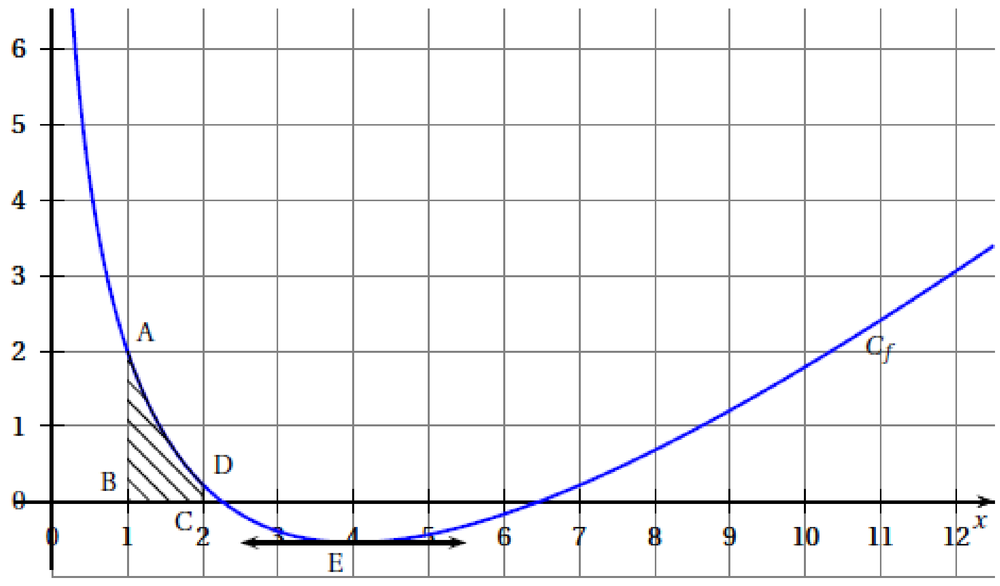
Dans cet exercice, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b\ln(x) + 1$$

où a et b sont deux nombres réels.
C_f est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.
Les points A et E sont deux points de la courbe C_f.
Le point A a pour coordonnées $(1\,;\,2)$ et le point E a pour abscisse 4.
La tangente à C_f au point E est horizontale.



1. Déterminer $f(1)$ et $f'(4)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(4)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4\ln(x) + 1$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ en justifiant la réponse. Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ en justifiant la réponse (on pourra factoriser l'expression de $f(x)$ par x).
3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau des variations de f.

Ex 15 Etude de Fonction 4 (Tiré du Bac Antilles Guyane 2014)

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

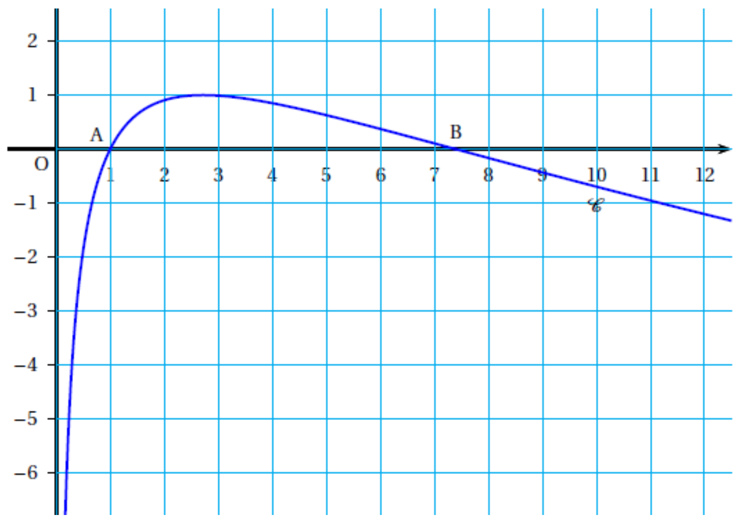
Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée sur la feuille ANNEXE.

1. Lire sur le graphique la limite de la fonction f en 0. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de $f(x)$.
2. Montrer que la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est définie par $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x est dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis donner les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses (Voir le graphique). Calculer les abscisses des points A et B.

   b. Calculer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur le graphique donné en annexe.
5. Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = -x(\ln x)^2 + 4x\ln x - 4x$$

vérifie F'(x)=f(x).



Ex 16 Niveau sonore (Tiré du Bac Métropole 2018)

Le niveau sonore N d'un bruit, à une distance D de sa source, dépend de la puissance sonore P de la source. Il est donné par la relation

$$N = 120 + 4\ln\left(\frac{P}{13 \times D^2}\right)$$

où N est exprimé en décibels (dB), P en Watts (W) et D en mètres (m).

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

1. Calculer le niveau sonore N d'un bruit entendu à 10 mètres de la source sonore dont la puissance P est égale à 2,6 Watts. *On arrondira le résultat à l'unité.*
2. On donne $N = 84$ dB et $D = 10$ m. Déterminer P. *On arrondira le résultat à 10^{-2} près.*

Partie B

Une entreprise de travaux publics réalise un parking en plein air. Sur le chantier d'aménagement de ce parking, une machine de découpe a une puissance sonore P égale à 0,026 Watts.

1. **a.** Montrer qu'à une distance D de la machine, le niveau sonore N dû à celle-ci vérifie la relation :

$$N = 120 + 4\ln(0{,}002) - 4\ln\left(D^2\right)$$

   b. Montrer qu'une approximation de N peut être $95{,}14 - 8\ln(D)$.

Dans la suite de l'exercice, à une distance de x mètres de la machine, le niveau sonore N émis par la machine est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,20]$ par :

$$f(x) = 95{,}14 - 8\ln(x)$$

2. **a.** Déterminer une expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0{,}1\,;\,20]$.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,20]$.

3. On suppose qu'un ouvrier de cette entreprise se situe à trois mètres de la machine.

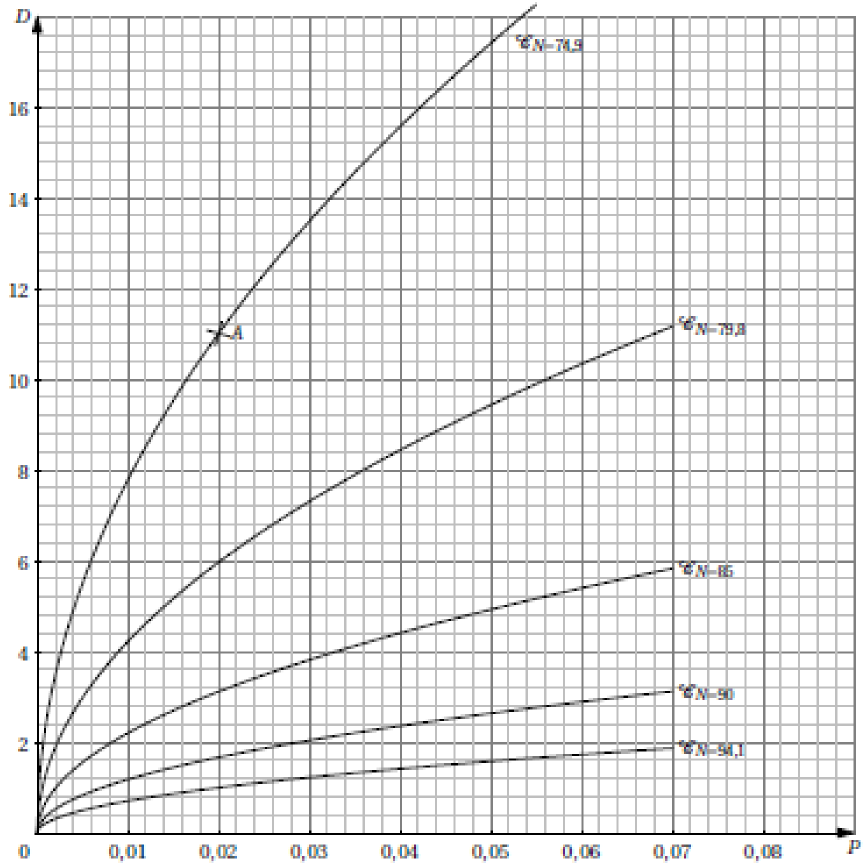
   La législation en vigueur l'oblige à porter des protections individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.

   Justifier, à l'aide du tableau ci-dessous, que l'ouvrier doit porter des protections individuelles contre le bruit.

Impacts sur l'audition	Niveaux sonores en décibels
Aucun	$[0\,;\,85[$
Risque faible	$[85\,;\,90[$
Risque élevé	$[90\,;\,120[$

Partie C

On s'intéresse au lien entre la puissance P d'un bruit et la distance D de sa source pour différentes valeurs de son niveau sonore N.



On admet que pour une puissance de 0,02 Watt, le niveau sonore du bruit est de 74,9 décibels à une distance de 11 mètres de la source sonore. Ainsi, le point A de coordonnées $(0{,}02\,;\,11)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_{N=74,9}$.

1. Pour un bruit de puissance P égale à 0,06 W, déterminer graphiquement à quelles distances minimale et maximale de la source peut se situer une personne pour que le niveau sonore N soit compris entre 85 et 90 dB.
2. Pour une source sonore située à une distance D de 8 m, déterminer graphiquement les puissances minimale et maximale de cette source pour obtenir un niveau sonore compris entre 74,9 dB et 79,8 dB.

Ex 17 Décibel (Tiré du Bac Métropole 2016)

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

Document

Echelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique (W/m^2)	Niveau sonore (dB) arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^2	140	
Course de Formule 1	10	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?
2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $[10^{-12}\,;\,10^6]$ et le niveau sonore est donnée par :

$$f(x) = \frac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120.$$

On pourra prendre $\frac{10}{\ln(10)} \simeq 4,34$.

   a. Vérifier la conjecture émise à la question 1.

   b. Quel serait le niveau sonore de deux motos ?

3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB.
Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

Ex 18 Equipe aerospatiale (Tiré du Bac Septembre Métropole 2014)

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage. Cette fusée a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.

L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation totale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_e = 3200\ m.s^{-1}$.

La vitesse finale de la fusée vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de $8000\ m.s^{-1}$ pour permettre la mise en orbite souhaitée.

Le but de l'exercice est de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre cette mise en orbite du satellite.

On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée. La masse x est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors $(x+50)$ tonnes.

Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en $m\cdot s^{-1}$, est donnée par

$$f(x) = V_e \times [\ln(x+50) - \ln 50]$$

où x est un réel de l'intervalle $[100\,;\,900]$.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[100; 900]$, $f(x) = 3200 \times \ln(0,02x+1)$.
On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.
2. **a.** Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle sera la vitesse finale de la fusée?

   b. Avec 400 tonnes de propergol au décollage la mise en orbite sera-t-elle possible?
3. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f.
4. Déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.