

Chapitre P1 : Loi Uniforme, Loi Exponentielle

1 – La notion de « Variable aléatoire »

a. Variables aléatoires discrètes

Activité 1 : Banco

Banco est un jeu de grattage de la Française des Jeux. C'est le plus ancien jeu de la Française des Jeux : il est apparu le 30 mai 1990 et était vendu 5 F. Depuis le passage à l'euro, le ticket est vendu 1 €. Pour 1 500 000 tickets, les lots sont résumés dans le tableau ci-contre.

| Nombre de lots | Montant des lots |
|----------------|------------------|
| 2 | 2 000 € |
| 100 | 100 € |
| 750 | 21 € |
| 8 000 | 11 € |
| 45 000 | 6 € |
| 94 000 | 3 € |
| 60 000 | 2 € |
| 155 500 | 1 € |

Dans tout l'exercice on note X le gain du joueur.

1) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

*On dit que X est une **variable aléatoire** : C'est un nombre dont la valeur dépend du hasard.*

2) On note « $X = 10$ » l'évènement « Le joueur gagne 10 € ».

a. Calculer $P(X = 10)$

b. Quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?

3) Compléter le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|-------|
| Valeur de X (x_i) | | | | | | | | | | Total |
| Probabilités (p_i) | | | | | | | | | | |

*Ce tableau est la **loi de probabilité** de X . Il précise avec quelle probabilité la variable prend telle valeur.*

4) a. Calculer $P(0 \leq X \leq 5)$

b. Calculer $P(X > 0)$

*Pour calculer la probabilité d'un évènement, on **additionne** les probabilités des valeurs qui le compose.*

La somme des probabilités de toutes les valeurs est égal à 1.

5) Combien le joueur gagne-t-il en moyenne par partie ?

*Ce nombre est appelé **espérance** de la variable X et noté $E(X)$. C'est la valeur moyenne de X lorsque l'expérience est répétée une infinité de fois. Il correspond à ce que l'on peut espérer gagner par partie.*

6) A l'aide de la calculatrice, déterminer la variance et l'écart-type du gain.

*La **variance** de la variable X , notée $Var(X)$ ou $V(X)$, est un nombre qui mesure la dispersion des valeurs de X autour de la moyenne : Plus il est grand plus les valeurs se dispersent, plus il est petit, plus elles sont « concentrées » autour de $E(X)$. Pour des raisons d'unités, on utilise souvent l'écart-type, notée $\sigma(X)$, qui est définie comme la racine carré de la variance.*

Définition 1 : Soit X une variable aléatoire **discrète** prenant les valeurs x_1, \dots, x_n avec les probabilités p_1, \dots, p_n

• L'**espérance** de X est le nombre $E(X) = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

• La **variance** de X est le nombre $V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$

• L'**écart-type** de X est le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$



b. Variables aléatoires continues

Activité 2 : Soit $[MN]$ un segment de longueur 10 cm. On choisit au hasard un point P du segment $[MN]$ et on note alors X la longueur du segment $[MP]$:



1) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

*La variable X peut prendre une infinité de valeurs : On dit que X est une variable **continue**.*

2) a. Quelle est la probabilité de choisir le nombre 1 ? le nombre π ? Que vaut $P(X = x)$ pour $x \in [0; 10]$?

b. Quelle est la probabilité de choisir un nombre entre 3 et 7 ?

c. Que vaut $P(X < 5)$? $P(X \geq 8)$? $P(2 \leq X \leq 6)$?

3) On a simulé avec un tableur 5000 fois cette expérience aléatoire. On a représenté en figure 1 la répartition des fréquences à l'aide d'un histogramme.

a. Quelle est approximativement la fréquence de chacune des dix classes ?

b. Combien vaut l'aire totale de toutes les barres de l'historgramme ?

c. On décide d'approximer cette histogramme par une fonction f continue sur $[0; 10]$.

Quelle fonction proposez-vous ? Tracer cette fonction en figure 2.

*La fonction f s'appelle la **fonction de densité** de la variable X .*

4) a. On considère l'évènement « Choisir un nombre entre 2.5 et 6.2 ». Hachurer en figure 2, la partie correspondante à cet évènement puis en déduire la valeur de $P(2.5 < X < 6.2)$.

b. En remarquant le fait que l'on s'intéresse à « l'aire sous la courbe » de la fonction f entre 2.5 et 6.2 retrouver par le calcul le résultat précédent.

Pour tous nombres x_1, x_2 tel que $[x_1; x_2]$ est inclus dans $[0; 10]$, on a $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$.

5) a. Que pensez-vous de la valeur de l'espérance de la variable X ?

b. Proposer une méthode informatique puis calculatoire pour trouver la valeur de $E(X)$

Figure 1 Répartition des fréquences

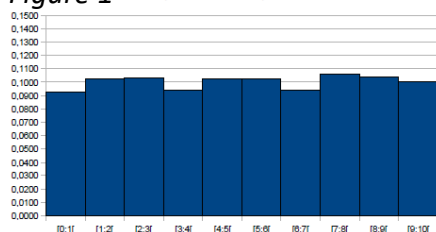
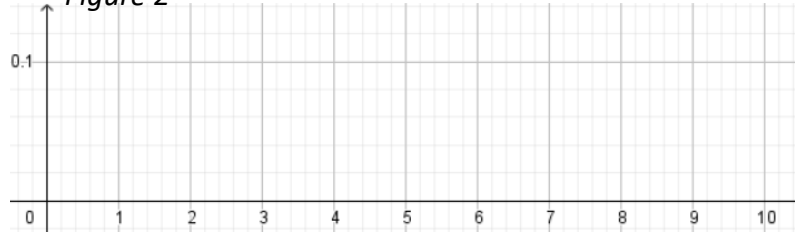


Figure 2



Soit X une variable aléatoire **continue** à valeurs dans un intervalle $I = [a; b]$.

Définition 2 : Soit f une fonction continue sur I . On dit que X admet f pour **fonction de densité** si pour tous nombres réels c et d de I tels que $x_1 \leq x_2$ on a : $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t) dt$

Définition 3 : Pour les variables continues, on remplace dans les formules la somme \sum par une intégrale \int :

- L'intégrale de la fonction de densité est égal à 1 : $\int_a^b f(t) dt = 1$
- L'**espérance** de X est le nombre $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$
- La **variance** de X est le nombre $V(X) = \int_a^b (t - E[X])^2 f(t) dt$ et l'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$



2 – Loi Uniforme

Définition 4 : On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $I = [a, b]$, si X admet pour densité la fonction constante $f(t) = \frac{1}{b-a}$.

Notation : Lorsque X suit la loi uniforme sur $[a; b]$, on note alors $X \sim \mathcal{U}(a, b)$.

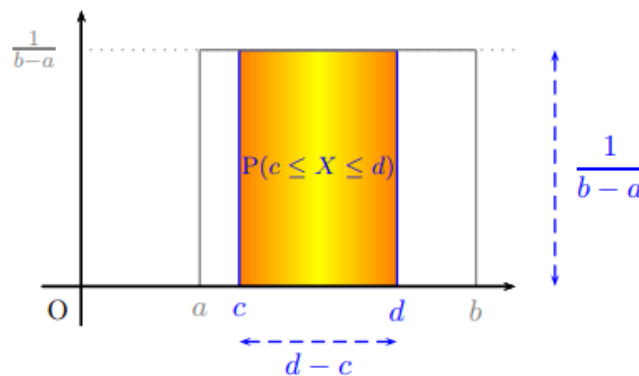
Remarque : La loi uniforme permet de modéliser une situation équiprobabilité dans le cas continu : Les valeurs de X sont répartis de manière uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.

Exemple 1 : La variable X de l'activité 2 suit la loi uniforme $\mathcal{U}(0,10)$. Sa densité est $f(t) = \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10}$.

Propriété 1 : Si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ alors pour tous nombres réels c et d de $I = [a; b]$ tels que $c \leq d$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Démonstration : Si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ alors $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{1}{b-a} t \right]_c^d = \frac{1}{b-a} d - \frac{1}{b-a} c = \frac{d-c}{b-a}$



Exemple 2 : À l'arrêt de bus de la gare, un bus passe toutes les 20 minutes. Un voyageur ignore les horaires et arrive à cet arrêt de bus. On note T la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en minutes. On suppose que T suit la loi uniforme $T \sim \mathcal{U}(0; 20)$. Quelle est la probabilité d'attendre le bus exactement 5 minutes ? entre 5 et 10 minutes ? plus de 10 minutes ?

La densité de la variable T est la fonction $f(t) = \frac{1}{20-0} = \frac{1}{20}$.

$P(T = 5) = \int_5^5 f(t) dt = 0$; $P(5 \leq T \leq 10) = \frac{10-5}{20-0} = \frac{5}{20} = 0.25$ et $P(T \geq 10) = \int_{10}^{20} f(t) dt = \frac{20-10}{20-0} = \frac{1}{2}$

Propriété 2 : Si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Démonstration : Si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ alors :

$$\bullet E(X) = \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

• Résultat admis pour la variance (Calcul trop technique).

Exemple 3 : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable T de l'exemple précédent.

$$\bullet E(T) = \frac{0+20}{2} = 10. \text{ Le temps moyen d'attente sera de } 10 \text{ min.}$$

$$\bullet V(T) = \frac{(20-0)^2}{12} = \frac{400}{12} = 33,33 \dots \text{ et } \sigma(T) = \sqrt{33,33 \dots} \approx 5,77$$

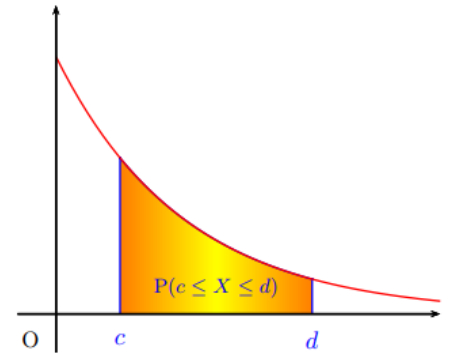


3 – Loi Exponentielle

Définition 5 : Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ si X admet pour densité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Notation : Lorsque la variable X suit la loi exponentielle de paramètre λ , on note alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Remarque : On utilise la loi exponentielle pour modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps t ne change rien à son espérance de vie à partir de ce temps-là.



Propriété 3 : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors pour tout nombre réel $x \geq 0$ on a : $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Démonstration : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $P(X \leq x) = P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$. Or une primitive de la fonction $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est $F(t) = -e^{-\lambda t}$ donc $P(X \leq x) = F(x) - F(0) = -(e^{-\lambda x} - 1) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Exemple 4 : La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,00005$. Déterminer la probabilité que ce composant tombe en panne avant 10 000 h, après 15 000 h, puis entre 10 000 h et 15 000 h de fonctionnement

- $P(T \leq 10\ 000) = 1 - e^{-0,00005 \times 10\ 000} = 1 - e^{-0,5} \approx 0,4$
- $P(T \geq 15\ 000) = 1 - P(T \leq 15\ 000) = 1 - (1 - e^{-0,00005 \times 15\ 000}) = e^{-0,75} \approx 0,47$
- $P(10\ 000 \leq T \leq 15\ 000) = P(T \leq 15\ 000) - P(T \leq 10\ 000) = 0,53 - 0,4 = 0,13$

Propriété 4 : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Démonstration : On admet le résultat pour la variance. Pour l'espérance on raisonne en trois étapes :

1) Montrer que la fonction $G(t) = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$ est une primitive de la fonction $g(t) = \lambda te^{-\lambda t}$

On dérive la fonction G : On a $(e^{-\lambda t})' = -\lambda e^{-\lambda t}$ et $\left(\frac{te^{-\lambda t}}{u \times v}\right)' = 1 \times e^{-\lambda t} + t \times -\lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}$

D'où $G'(t) = -(e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}) - \frac{1}{\lambda} \times (-\lambda e^{-\lambda t}) = -e^{-\lambda t} + \lambda te^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda te^{-\lambda t} = g(t)$.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$. On pourra utiliser une croissance comparée (C.C).

$G(x) = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$: Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $-\lambda x \rightarrow -\infty$ (car $\lambda > 0$) et donc $e^{-\lambda x} \rightarrow 0$ d'où $\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \rightarrow 0$.
 $-xe^{-\lambda x} = -\frac{x}{e^{\lambda x}} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\frac{e^{\lambda x}}{\lambda x}}$. Or comme $\lambda x \rightarrow +\infty$ (car $\lambda > 0$), $\frac{e^{\lambda x}}{\lambda x} \rightarrow +\infty$ (C.C) et donc $\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\frac{e^{\lambda x}}{\lambda x}} \rightarrow 0$

3) Calculer l'espérance $E(X)$. On pourra utiliser l'égalité $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(t) dt$

$E(X) = \int_0^{+\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) - G(0) = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$

Exemple 5 : Déterminer la durée de vie moyenne du composant électronique de l'exemple précédent.

$E(T) = \frac{1}{0,00005} = 20\ 000$. La durée de vie moyenne du composant sera de 20 000 h.



Exercice 1

Aux heures d'ouverture de la gare routière de Saint-Denis, le « Z'éclair » passe toutes les heures à destination de Saint-Pierre. Un voyageur, qui n'a pas eu le temps de se renseigner sur les horaires, se présente dans la gare. On note X la variable aléatoire donnant le temps d'attente, en minutes, de ce voyageur dans la gare.

- Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
- Calculer la probabilité que le voyageur attende :
 - exactement 15 minutes
 - entre 15 et 30 minutes
 - plus de 40 minutes.
- Quel est le temps d'attente moyen ?

Exercice 2

Soit $[AB]$ un segment de longueur 10 cm. On choisit au hasard un point M sur $[AB]$ et on note X la variable aléatoire donnant la distance AM , en cm.

- Quelle loi suit la variable aléatoire X ainsi définie ?
- Calculer la probabilité que le point M :
 - soit le milieu I de $[AB]$;
 - appartienne au segment $[AC]$, où C est le point de $[AB]$ tel que $AC = 3$;
 - soit plus près de B que de I .

Exercice 3

On choisit un nombre réel au hasard entre 0 et 2. Déterminer la probabilité qu'il soit compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

Noé et Quentin se sont donné rendez-vous devant le cinéma entre 14h00 et 14h30. Noé arrive à 14h10 tandis que Quentin considère que son arrivée, entre 14h00 et 14h30 est le fruit du hasard. Déterminer les probabilités suivantes :

- Quentin arrive moins d'une minute après Noé ;
- Quentin arrive avant Noé ;
- Noé attend Quentin plus de 10 minutes.

Exercice 5

Soit T une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,02. Déterminer les probabilités suivantes :

- $P(T \leq 50)$
- $P(T > 100)$
- $P(2000 \leq T \leq 3000)$.

Exercice 6

- À la caisse d'un magasin, on admet que la variable aléatoire T qui, à un client pris au hasard, fait correspondre le temps de son passage en caisse exprimé en secondes, suit la loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,008$.
 - Pour un client pris au hasard, quelle est la probabilité que son passage en caisse dure moins de 2 minutes ? Plus de 5 minutes ?
 - Quel est le temps moyen de passage en caisse dans ce magasin ?
- Une file d'attente se forme devant cette caisse. Un client arrive dans la file. On admet que la variable aléatoire T' qui donne le temps (en secondes) entre l'arrivée de deux clients successifs dans la file d'attente suit une loi exponentielle de paramètres λ .
 - Sur la plage horaire considérée, il arrive en moyenne un client toutes les 150 secondes devant cette caisse. En déduire la valeur du paramètre λ .
 - On démontre que, dans une telle modélisation, le nombre moyen de clients dans le système (personne servie en caisse et personnes dans la file d'attente) est $\frac{\rho}{1-\rho}$ où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Donner, à l'entier près, le nombre de personnes en moyenne dans la file d'attente.

Exercice 7 (Bac STI2D, Antilles 2014)

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux types A et B de téléviseurs à écran plat. Les réponses aux questions 1.(a.), 1.(b) et 1.(c) seront arrondies au centième.

- La durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un téléviseur du type A, avant que survienne la première panne, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-5}$.
 - Calculer la probabilité que la première panne survienne avant la 32000^e heure de fonctionnement.
 - On s'intéresse à un téléviseur de type A fonctionnant chaque jour pendant 4 heures. Calculer la probabilité que la première panne d'écran ne survienne pas avant 10 ans. *On prendra 1 année = 365 jours.*
 - Calculer la probabilité que la première panne survienne après 10 000 heures et avant 4000 heures de fonctionnement.
 - Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.
- La durée de fonctionnement avant la première panne d'un téléviseur de type B est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ' . Une étude statistique a permis d'évaluer $P(Y \leq 32000) = 0,8$. Calculer la valeur arrondie à 10^{-5} de λ' .

Loi Uniforme, Exponentielle – Fiche d'exercices

Ex 1 Pales éoliennes (Tiré du bac Métropole Septembre 2015)

Un sismologue déclare en janvier 2014 : « Le risque d'un séisme majeur le long de la faille de San Andreas, en Californie, dans les vingt prochaines années est supérieur à 70 % ».

On s'intéresse au temps, exprimé en années, écoulé entre deux séismes majeurs le long de cette faille en Californie. On admet que ce temps est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Document 1

La faille de San Andreas, en Californie : séismes majeurs de magnitude supérieure ou égale à 5.

| Ville | Année | Magnitude |
|------------------|-------|-----------|
| Comté d'Orange | 1769 | 6 |
| San Diego | 1800 | 6,5 |
| San Francisco | 1808 | 6 |
| Fort Tejon | 1857 | 8,3 |
| Monts Santa Cruz | 1865 | 6,5 |
| Hayward | 1868 | 6,9 |
| San Francisco | 1906 | 8,2 |
| Santa Barbara | 1925 | 6,3 |
| Santa Barbara | 1927 | 7,3 |
| Long Beach | 1933 | 6,3 |
| Comté de Kern | 1952 | 7,7 |
| San Francisco | 1957 | 5,3 |
| San Fernando | 1971 | 6,6 |
| LomaPrieta | 1989 | 7,1 |
| Parkfield | 2004 | 6,0 |
| Los Angeles | 2008 | 5,5 |
| Mexicali | 2010 | 7,2 |
| Napa | 2014 | 6,0 |

Document 2

Rappels sur la loi exponentielle

- λ est un nombre réel strictement positif.
- Une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

1. Pour illustrer la situation un élève utilise un tableur.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
|---|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 1 | Année | 1769 | 1800 | 1808 | 1857 | 1865 | 1868 | 1906 | 1925 | 1927 | 1933 | 1952 | 1957 | 1971 | 1989 | 2004 | 2008 | 2010 | 2014 | Total |
| 2 | | | 31 | 8 | 49 | 8 | 3 | 38 | 19 | 2 | 6 | 19 | 5 | 14 | 18 | 15 | 4 | 2 | 4 | 245 |

- Proposer un titre pour la cellule A2 grisée.
 - Quelle formule a saisi l'élève dans la cellule C2 afin de compléter ce tableau jusqu'à la colonne S par « recopie automatique vers la droite » ?
- Calculer en années la moyenne m , arrondie à 10^{-2} près, du temps écoulé entre deux séismes majeurs le long de la faille de San Andreas en Californie.
 - Justifier qu'une approximation du paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la variable aléatoire X est 0,069 4.
 - Calculer $P(X \leq 20)$ à 10^{-2} près.
 - L'affirmation du sismologue paraît-elle cohérente avec cette modélisation par une loi exponentielle ?
 - Le dernier séisme majeur a eu lieu en 2014 à Napa. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres séismes majeurs le long de la faille de San Andreas, en Californie, avant 2050. On arrondira à 10^{-2} près.
 - Résoudre l'équation $1 - e^{-0,0694t} = 0,95$.
 - Interpréter ce résultat.

Ex 2 Pales éoliennes (Tiré du bac Antilles-Guyanne 2018)

L'entreprise gère aussi la réparation des pales sur leur lieu d'utilisation.

On estime que la durée de vie d'une pale, exprimée en années, avant la première réparation, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,125$.

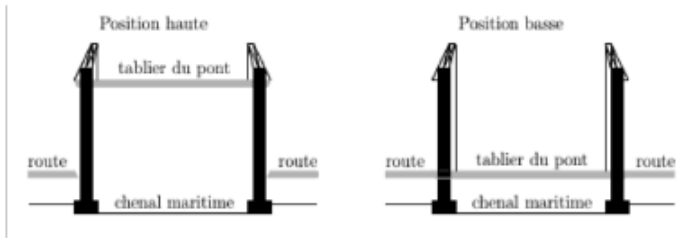
Pour chaque question, donner le résultat arrondi à 10^{-3} .

- Calculer $P(0 \leq X \leq 5)$.
- Calculer la probabilité qu'une pale n'ait pas eu de réparation au cours des dix premières années.
- Déterminer la durée de vie moyenne d'une pale avant la première réparation.

Ex 3 Pont levant (Tiré du bac Métropole 2016)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 7 mètres
 Longueur du tablier : 30 mètres
 Temps de montée du tablier : 2 minutes
 Temps en position haute du tablier (hors incident) : 8 minutes
 Temps de descente du tablier : 2 minutes

Partie A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est *en position haute*. On s'intéresse ici au temps d'attente D , exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

- Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?
- On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2; 10]$. Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.
- Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes.

Ex 5 QCM (Tiré de divers sujet de bac)

- Le temps d'attente en minute à un péage est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ (exprimé en min^{-1}).

En moyenne une personne attend à ce péage :

- 2 min
- 5 min
- 10 min
- 20 min

Partie B - Sur l'eau

Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$. Ce temps est appelé temps de latence.

- Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte.
- On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 0,05e^{-0,05x}$.
 - Montrer que la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = -e^{-0,05x}$ est une primitive de f .
 - On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0, +\infty[$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x) dx$.
Démontrer que $P(T \leq t) = 1 - e^{-0,05t}$.
- Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.
 - Calculer la probabilité que le temps de latence soit supérieur à un jour.
 - Calculer $P(12 \leq T \leq 24)$.

Ex 4 Eolienne (Tiré du bac Métropole Septembre 2017)

La durée de vie, en jours, d'un des composants électroniques d'une éolienne est modélisée par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,002$.

- Calculer la durée de vie moyenne, en jours, d'un composant de ce type.
- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0,002e^{-0,002x}$. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $F(x) = -e^{-0,002x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - On rappelle que, pour tout nombre réel t de $[0; +\infty[$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x) dx$.
On a donc $P(T \leq t) = 1 - e^{-0,002t}$.
Le fabricant affirme : « la probabilité que la durée de vie du composant soit supérieure à 100 jours est d'au moins 0,8 ». Que penser de cette affirmation ? Justifier la réponse.

- On considère la production d'une usine de composants électroniques. On admet que la durée de fonctionnement sans panne (en années) de ces composants peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

La probabilité qu'un composant pris au hasard, soit tombé en panne au bout 6 ans est, au centième près :

- 1,6
- 0,55
- 0,45
- 0,05

Ex 6 Batteries Lithium-Ion (Tiré du bac Polynésie 2018)

Une usine fabrique des batteries Lithium-Ion, garanties 4 ans, nécessaires au fonctionnement des véhicules « 100% électrique ».

La durée de vie moyenne d'une telle batterie s'élève à 7 ans.

On admet que la variable aléatoire T qui, à une batterie Lithium-Ion prélevée au hasard dans le stock de l'usine, associe sa durée de vie, exprimée en années, suit la loi exponentielle de paramètre λ .

- Déterminer la valeur exacte de λ .
- Pour la suite, on prendra $\lambda = 0,143$.
 - Déterminer la probabilité qu'une batterie Lithium-Ion soit encore en état de fonctionnement au bout de 8 ans. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
 - Déterminer la probabilité qu'une batterie Lithium-Ion tombe en panne avant la fin de la garantie. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
 - Déterminer le réel t_0 tel que $P(T > t_0) = 0,75$. On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à l'unité.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Ex 7 Iode radioactif (Tiré du bac Antilles-Guyane 2017)

En médecine, on utilise de l'iode radioactif pour traiter certaines maladies de la glande thyroïde.

La durée de vie exprimée en heure d'un atome d'iode radioactif est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0036$, exprimé en h^{-1} .

- Calculer la durée de vie moyenne en heure de l'atome d'iode radioactif.
On arrondira le résultat à l'unité.
- Déterminer $P(24 < D < 48)$. Interpréter le résultat.
Rappel : la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
- On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps T , exprimé en heure, nécessaire pour que la moitié des atomes radioactifs d'une substance se soit désintégrée.

Autrement dit, ce réel T est tel que $P(D < T) = \frac{1}{2}$.

- Démontrer que $T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.
- En déduire la demi-vie de l'iode radioactif. Donner le résultat en jour.

Ex 8 Eolienne (Tiré du bac Septembre Metropole 2017)

La durée de vie, en jours, d'un des composants électroniques d'une éolienne est modélisée par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,002$.

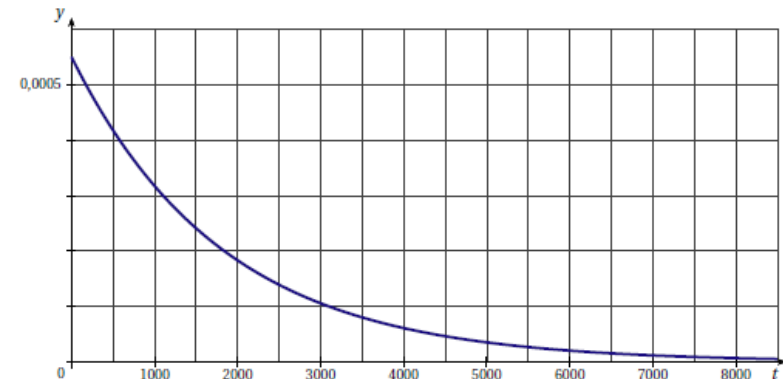
- Calculer la durée de vie moyenne, en jours, d'un composant de ce type.
- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0,002e^{-0,002x}$.
Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $F(x) = -e^{-0,002x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - On rappelle que, pour tout nombre réel t de $[0; +\infty[$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x) dx$.
On a donc $P(T \leq t) = 1 - e^{-0,002t}$.
Le fabricant affirme : « la probabilité que la durée de vie du composant soit supérieure à 100 jours est d'au moins 0,8 ».
Que penser de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Ex 9 Propositions (Tiré de divers sujet de bac)

Pour chacune des 2 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Indiquer sur la copie le numéro de la proposition, la réponse correspondante et la justification.

- La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 5,5 \times 10^{-4}$ et dont la fonction de densité de probabilité est représentée ci-dessous.



Proposition 1 : la probabilité, arrondie à 0,01 près, qu'un composant électronique pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1 000 heures est 0,35.

- On peut modéliser le temps d'attente d'un client, en minutes, à la caisse d'un supermarché par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . Des études statistiques montrent que la probabilité qu'un client attende plus de 7 minutes à cette caisse est 0,417.
On rappelle que pour tout réel t positif, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

Proposition 2 : Le temps moyen d'attente à cette caisse de supermarché est 9 minutes.