

Chapitre 7 : Loi binomiale

1 – Arbres pondérés

Activité 1 (Sac de lettres) :

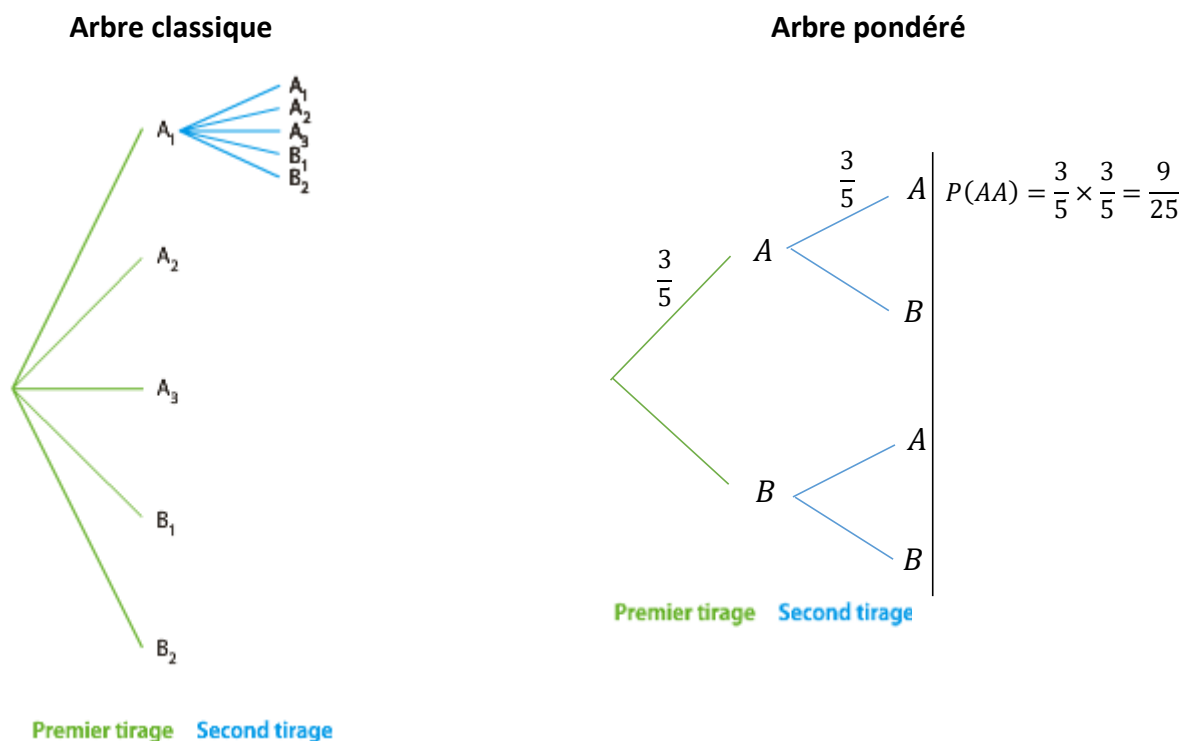
Dans un sac, on dépose cinq lettres : A, A, A, B et B .

On tire une lettre au hasard, on la note, puis on la remet dans le sac.

On effectue ensuite un second tirage dans les mêmes conditions.

On veut déterminer la probabilité d'obtenir chacun des « mots » AA, AB, BA et BB .

- Puisqu'il y a trois lettres A et deux lettres B , on va les différencier en les notant A_1, A_2, A_3, B_1 et B_2 .
 - Compléter l'arbre classique ci-dessous, puis déterminer le nombre d'issues possibles
 - Déterminer la probabilité de chacun des mots recherchés.
- On regroupe les branches de l'arbre précédent menant à la lettre A et celle menant à la lettre B .
 - Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.
 - Que remarque-t-on ?



- Réaliser l'arbre pondéré correspondant aux expériences aléatoires suivantes, puis déterminer la probabilité d'obtenir un mot du dictionnaire.
 - Trois tirages **avec** remise dans un sac qui contient dix lettres : six N et quatre O .
 - Deux tirages **sans** remise, dans un sac qui contient dix lettres : un X , cinq E et trois T .

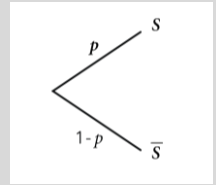
Propriété 1 : Dans un arbre pondéré, la probabilité d'une liste de résultat est égale au **produit** des probabilités de chaque résultat.



2 – Loi de Bernoulli

Définition 1 : On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p une expérience aléatoire admettant exactement deux issues possibles :

- « **Succès** », noté « S », dont la probabilité de réalisation est p .
- « **Échec** », noté « E » ou « \bar{S} », dont la probabilité de réalisation est $q = 1 - p$.

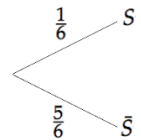


Exemple 1 : On lance un dé bien équilibré et on considère comme « succès » le fait d'obtenir un « 6 ».

Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

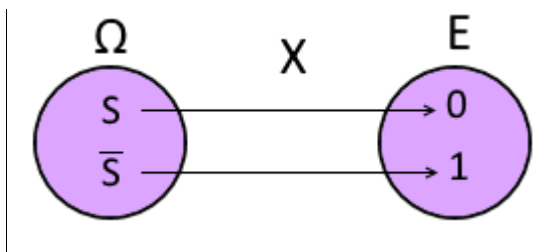
On a pour succès $S =$ « Obtenir un 6 » et pour échec $\bar{S} =$ « Ne pas obtenir un 6 ».

La probabilité du succès est $P(S) = \frac{1}{6}$. La probabilité de l'échec est $P(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.



Définition 2 : On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. On dit alors que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p et on note $X \sim b(p)$.

Variable de Bernoulli



Loi de Bernoulli

x_i	1	0	Total
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$	1

- $P(X = 1) = P(S) = p$
- $P(X = 0) = P(\bar{S}) = 1 - p$

Exemple 1 (Suite) : On considère la variable X qui vaut 1 si l'on obtient un « 6 » et qui vaut 0 sinon.

La variable X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$:

k	1	0	Total
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

Propriété 2 : Si $X \sim b(p)$ alors on a $E(X) = p$

Démonstration : Si $X \sim b(p)$ alors on a $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$

Exemple 1 (Suite) : Comme $X \sim b(\frac{1}{6})$ on a alors $E(X) = \frac{1}{6}$

Histoire (Jacques Bernoulli) :



(1654-1705)

Jacques Bernoulli est connu pour ses travaux en probabilités.

C'est l'un des premiers mathématicien à poser les principes du calcul des probabilités.



3 – Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition 3 : On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a aucune influence sur celle de l'autre.

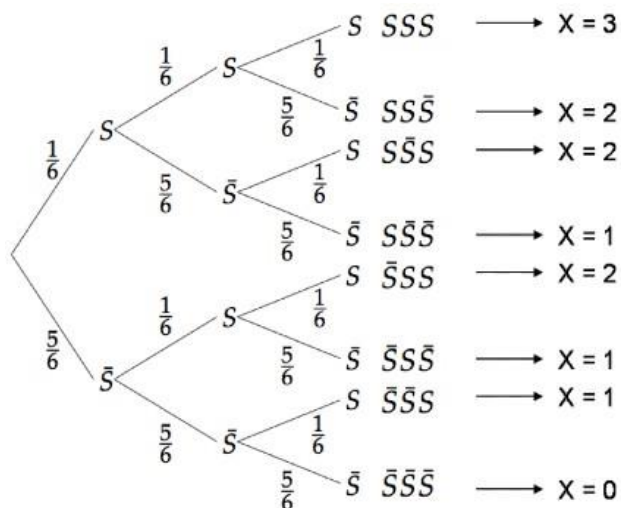
Exemple 2 :

- 1) 'Lancer un dé' et 'Piocher une carte' sont deux expériences aléatoires indépendantes.
- 2) Lancé plusieurs fois de suite une pièce de monnaie, constitue la répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes : Le résultat de chaque lancé n'a pas d'influence sur celui des autres.
- 3) Si l'on pioche successivement deux cartes dans un jeu, les deux tirages ne sont pas indépendants : Les probabilités d'obtenir chaque carte ne sont pas les mêmes au premier tirage qu'au second.

Définition 4 :

- On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p , l'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, et de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli avec probabilité de succès p .
- On considère la variable X qui compte le nombre de succès au cours de ces n épreuves. On dit alors que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \sim B(n; p)$.

Exemple 3 : On lance 3 fois de suite un dé bien équilibré en considère comme succès l'obtention d'un « 6 ».



- C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ (nombre de répétition) et $p = \frac{1}{6}$ (probabilité de succès). On peut représenter ce schéma avec un arbre pondéré.
- Soit X le nombre de « 6 » obtenus sur les 3 lancés. X compte le nombre de succès au cours des 3 épreuves. On a donc $X \sim B(3; \frac{1}{6})$.
- Les valeurs possibles pour X sont 0, 1, 2 et 3. On peut utiliser l'arbre pondéré pour calculer la loi de X .

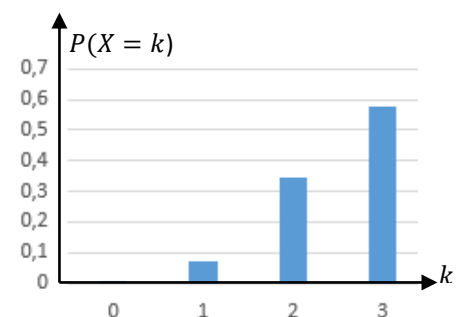
$$P(X = 3) = P(SSS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0.004.$$

$$P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(\bar{S}SS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216} \approx 0.069.$$

$$P(X = 1) = P(S\bar{S}\bar{S}) + P(\bar{S}\bar{S}S) + P(S\bar{S}S) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \approx 0.347.$$

$$P(X = 0) = P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \approx 0.578.$$

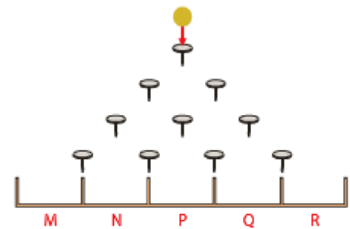
k	0	1	2	3	Total
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	1



4 – Coefficients binomiaux et loi binomiale

Activité 2 (Planche de Galton) :

Lorsque la bille tombe sur un clou elle a autant de chance d'aller à gauche qu'à droite. On lâche la bille jaune sur le premier clou et on s'intéresse au chemin qu'elle effectue jusqu'au casiers M, N, P, Q, et R.



- 1) La boule effectue le chemin suivant *GDDG*. Dans quel casier terminera-t-elle sa course ?
- 2) Quels sont les chemins qui mènent à chaque casier ?

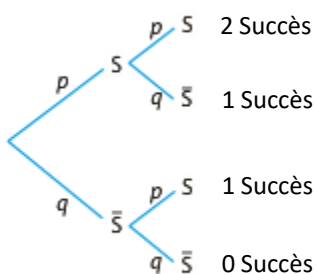
Casier M	Casier N	Casier P	Casier Q	Casier R
<i>GGGG</i>				

- 3) Modéliser la planche de Galton à l'aide d'un arbre pondéré.
- 4) On note $\binom{4}{k}$ le nombre de chemin(s) où la boule est allée exactement k fois à gauche.
Compléter : $\binom{4}{0} =$ $\binom{4}{1} =$ $\binom{4}{2} =$ $\binom{4}{3} =$ $\binom{4}{4} =$
- 5) En déduire la probabilité pour une bille d'arriver dans chacun des casiers.

Définition 5 : Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ (avec $0 \leq k \leq n$) est le nombre de chemins qui mènent à k succès pour n répétitions dans l'arbre d'un schéma de Bernouilli.

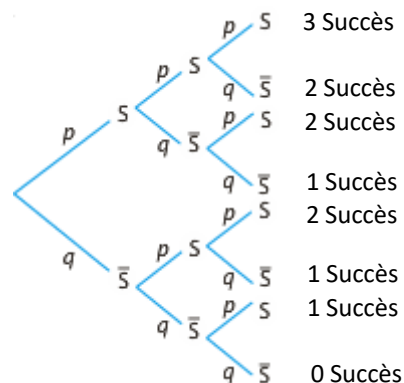
Exemple 4 :

Cas $n = 2$



$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

Cas $n = 3$



$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

Remarque : Pour des plus grandes valeurs de n , on peut utiliser la calculatrice pour obtenir $\binom{n}{k}$

Casio	TI
OPTN / ► / PROB / nCr	MATH / PRB / Combinaison
<u>Syntaxe :</u> n nCr k	<u>Syntaxe :</u> n Combinaison k

Exemple 5 : Le nombre de façon d'obtenir 5 succès sur 10 épreuves est $\binom{10}{5} = 252$.

Lorsque X suit une loi binomiale, on a vu que dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, on pouvait calculer la loi de X à l'aide d'un arbre. Lorsque n est plus grand la réalisation de l'arbre devient laborieuse voire même impossible. On utilise alors la propriété suivante :

Propriété 3 : Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors pour tout k compris entre 0 et n on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p$$

Démonstration : Dans l'arbre, chaque chemin menant vers k succès a pour probabilité $p^k \times q^{n-k}$ d'être emprunté, puisqu'il est composé de k branches de probabilité p et de $n - k$ branches de probabilité q . Or il y a en tout $\binom{n}{k}$ chemins dans l'arbre menant vers k succès, d'où le résultat.

Exemple 6 : On lance 10 fois un dé bien équilibré. Quel est la probabilité d'avoir exactement deux « 6 ». Soit X le nombre de « 6 » obtenus. X compte le nombre de succès sur les 10 épreuves : On a $X \sim B(10; \frac{1}{6})$.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10-2} = 45 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0.291.$$

5 – Espérance de la loi binomiale

Propriété 4 : Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors $E(X) = n \times p$.

Exemple 7 : Quel est le nombre moyen de « 6 » sur 10 lancés ?

Le nombre moyen est donné par l'espérance de la variable X définie dans l'exemple précédent.

Comme $X \sim B(10; \frac{1}{6})$ on a $E(X) = 10 \times \frac{1}{6} = 1.66$.



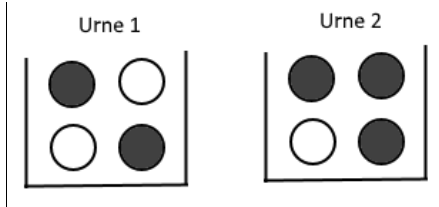
Loi binomiale – Exercices

Arbres pondérés

1 (Urnes)

On considère le jeu suivant :

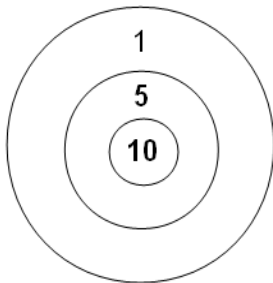
« Choisir une urne puis piocher deux boules. Vous gagnez si les deux boules sont de la même couleur. »



Quelle urne choisissez-vous ?

2 (Jeu de fléchettes)

On lance successivement 2 fléchettes sur la cible ci-dessous :



On admet que la probabilité de toucher

- Le cercle intérieur est de 5 %
- Le cercle intermédiaire est de 20 %
- Le cercle extérieur est de 75 %.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus sur les deux lancers.

- 1) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2) En déduire les valeurs possibles pour X .
- 3) Calculer la probabilité des événements suivants :
 A : « Obtenir 20 points »
 B : « Obtenir 6 points »
 C : « Obtenir plus de 10 points ».
- 4) Déterminer la loi de X .
- 5) Calculer l'espérance de X .

3 (Poker Texas Holdem)

Au Poker Texas Holdem, on commence par distribuer à chaque joueur une main de deux cartes. Quelles est la probabilité pour un joueur d'obtenir une paire d'As ?

Loi binomiale

4 Dans les cas suivants, est-ce que la variable aléatoire X suit une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

- 1) On lance 10 fois une pièce de monnaie bien équilibré. Soit X le nombre de « Pile ».
- 2) Dans une urne contenant 10 boules dont 4 boules blanches, on effectue 3 tirages avec remise. Soit X le nombre de boules blanches obtenues.
- 3) Dans le sac du scrabble il y a 102 jetons, dont 15 jetons « E ». En début de partie, vous piochez vos 7 lettres. Soit X le nombre de « E » obtenu.
- 4) On vous distribue 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Soit X le nombre de cœur obtenus.
- 5) Dans la population française vous choisissez au hasard 1000 personnes. Soit X le nombre de filles obtenues.

5 On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X le nombre de « Pile »

- 1) Représenter cette situation avec un arbre pondéré.
- 2) Quelle est la loi suivie par la variable X . Calculer cette loi.
- 3) Représenter la loi de X avec un histogramme.
- 4) Déterminer la probabilité d'avoir au moins un pile.

6 (QCM)

Vous répondez au hasard à un QCM de 3 questions à 4 réponses possibles. Chaque réponse juste rapporte 1 point et il y a qu'une seule bonne réponse possible. Soit X le nombre de points obtenus.

- 1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
- 2) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- 3) Calculer la loi de X .
- 4) Calculer la probabilité des événements suivants :
 A : Obtenir une bonne réponse.
 B : Obtenir plusieurs bonnes réponses.
 C : Obtenir aucune bonne réponse.
- 5) Combien de points peut-on espérer obtenir ?



6 (Coefficients binomiaux 1)

Déterminer les coefficients binomiaux suivants sans utiliser la calculatrice :

$$\binom{5}{0}; \binom{5}{5}; \binom{5}{1}; \binom{3}{2}$$

7 (Coefficients binomiaux 2)

A l'aide de la calculatrice calculer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{5}{2}; \binom{10}{4}; \binom{20}{5}; \binom{100}{10}$$

8 (Tennis)

Selon les statistiques Rafael Nadal réussit 75 % de ces premiers services

- 1) Lorsqu'il démarre un nouveau jeu, sur ses 4 premiers services, quelles sont ses chances de :
 - a. Rater tous ces services.
 - b. Réussir tous ces services.
 - c. Réussir au moins 3 de ses 4 premiers services
- 2) Combien réussira-t-il de services en moyenne sur ces 4 premiers services.

9 (Classe)

Dans la classe il y a 35 élèves dont 28 filles. Le professeur interroge 10 élèves au hasard, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogé.

Soit X le nombre de filles interrogées.

- 1) Quel est la loi suivie par X .
- 2) Calculer la probabilité qu'exactement 5 filles soient interrogées.
- 3) Calculer la probabilité qu'au moins 8 filles soient interrogées.
- 4) En déduire la probabilité que strictement moins de 8 filles soient interrogées
- 5) Est-il possible qu'aucune filles soient interrogées ?
- 6) En moyenne combien de filles seront interrogées ?

10 (Centrale nucléaire)

Dans une centrale nucléaire, on estime que le risque journalier d'un incident de type majeur (comme Tchernobyl ou Fukushima) est d'environ une chance sur un million. Quelle est la probabilité qu'il y'ait au moins un incident de type majeur en un siècle dans cette centrale nucléaire ?

11 (Défauts de fabrication)

A la sortie d'une chaîne de production, on a constaté que 2% des pièces fabriqués sont défectueuse. Lors d'un contrôle de la production, on prélève un lot de 20 pièces

- 1) Quelle est la probabilité pour que trois pièces exactement soient défectueuses.
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'au moins trois pièces soient défectueuses.
- 3) Quelle est la probabilité pour qu'au plus trois pièces soient défectueuses.

12 (Tir)

Lors d'un entraînement, un policier tire sur une cible. Selon ses statistiques, il touche la cible dans 90% des cas. Le policier effectue une série de 7 tirs. On note X le nombre de fois où la cible est atteinte.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- 2) A l'aide de la calculatrice, calculer la loi de X .
- 3) Représenter cette loi à l'aide d'un histogramme
- 4) Combien de fois, la cible a-t-elle le plus de chance d'être touché ?
- 5) Combien de fois la cible sera-t-elle touché en moyenne ?
- 6) Sur le terrain, le policier tire sur un dangereux criminel. On estime qu'il a les mêmes chance d'atteindre sa cible que lors de l'entraînement. Quelle est la probabilité pour le policier d'atteindre le bandit :
 - a. Au bout du premier coup.
 - b. Au bout du deuxième coup.
 - c. Au bout du deuxième coup.

13 (Démarchage)

Une entreprise de téléphonie démarcher ses clients pour leur proposer un nouveau forfait téléphonique. Une étude interne révèle que dans 5% des cas, le client contacté accepte l'offre du nouveau forfait. Un vendeur contacte 20 clients. Quelle est la probabilité pour ce vendeur de réaliser entre 3 et 5 ventes ?

