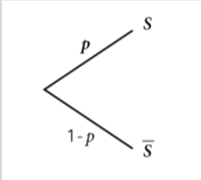
Chapitre P2 : Loi Binomiale, Loi Normale

1 – Loi binomiale

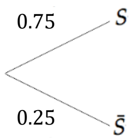
Définition 1 : Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues possibles :



- « **Succès** », noté « S » , dont la probabilité de réalisation est p.
- « **Échec** », noté « E » ou « $\bar{S}$ », dont la probabilité de réalisation est $q = 1 - p$.

Exemple 1 : Un joueur de tennis professionnel possède un taux de réussite au service de 75 %.

La réalisation d'un service est une épreuve de Bernouilli de paramètre $p = \frac{3}{4} = 0.75$



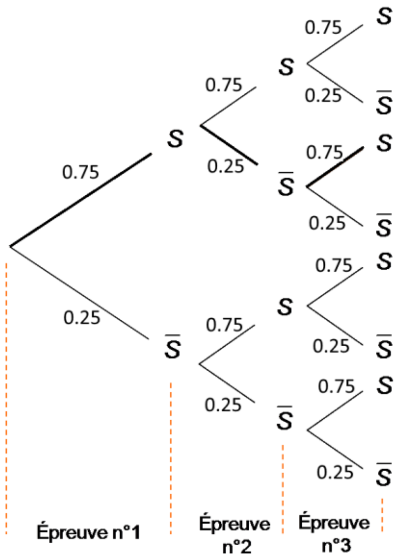
On a pour succès $S =$ « Réussir le service » avec $P(S) = 0.75$

On a pour echec $\bar{S} =$ « Rater le service » avec $P(\bar{S}) = 1 - 0.75 = 0.25$

Définition 2 : Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p, est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, et de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Remarque : On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur celui de l'autre.

Exemple 2 : Notre joueur de tennis réalise une série de trois services consécutifs. On considère que le résultat d'un service n'influe pas sur les services suivants. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0.75$. On peut représenter un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré :



1) Quelle est la probabilité qu'il réussisse ces trois services.

   $P(SSS) = 0.75 \times 0.75 \times 0.75 = 0.75^3 \approx 0.421$

2) Quelle est la probabilité qu'il rate tous ces services

   $P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 0.25^3 \approx 0.016$

3) Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement un service.

   $P(S\bar{S}\bar{S}) + P(\bar{S}S\bar{S}) + P(\bar{S}\bar{S}S) = 3 \times 0.75 \times 0.25^2 = 0.141$

4) Quelle est la probabilité qu'il rate exactement un service.

   $P(\bar{S}SS) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S}) = 3 \times 0.75^2 \times 0.25 = 0.421$

5) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins un service.

   $P(au\ moins\ un\ succes) = 1 - P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 1 - 0.015 = 0.985$

Rappel : Dans un arbre pondéré, on peut utiliser les 3 règles suivantes :

• Règle 1 : À partir d'un même nœud, la somme des probabilités est égale à 1.

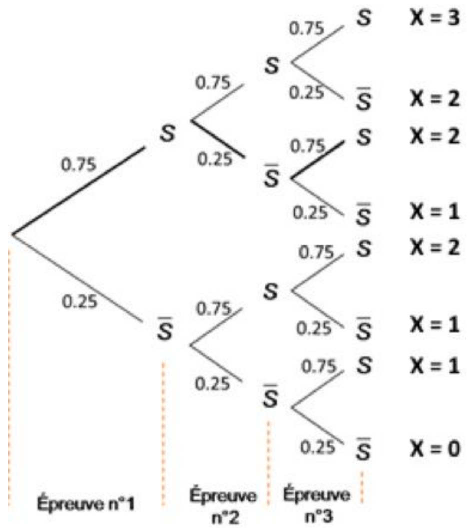
• Règle 2 : Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.

• Règle 3 : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins

Définition 3 : Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des n épreuves. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \sim B(n; p)$.

Remarque : X est un variable aléatoire discrète : Sa valeur est un nombre entier compris entre 0 et n.

Exemple 3 : On note X le nombre de services réussis sur les trois services réalisés. On a donc $X \sim B(3; 0.75)$

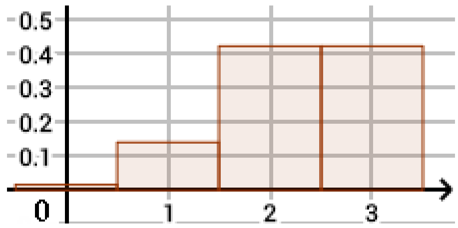


1) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

   X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3

2) Calculer la loi de X puis la représenter avec un histogramme.

Valeurs	0	1	2	3	**Total**
Probabilités	0.016	0.141	0.422	0.422	1



- $P(X = 0) = 0.016$
- $P(X = 1) = 0.141$
- $P(X = 2) = 0.442$
- $P(X = 3) = 0.442$

Lorsque le nombre de répétition est grand, on utilise la calculatrice pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$

Casio : $\boxed{\text{Menu}}$ / $\boxed{STAT}$ puis $\boxed{DIST}$ $(F5)$/ $\boxed{BINM}$ $(F5)$

- Pour calculer $P(X = k)$: $\boxed{Bpd}$ $(F1)$
- Pour calculer $P(X \leq k)$: $\boxed{Bcd}$ $(F2)$
- On complète de la façon suivante :

  . $Data$: $\boxed{Var}$ $(F2)$

  . x : Nombre de succès (k)

  . $Numtrial$: Nombre d'épreuves (n)

  . p : Probabilité du succès (p)

TI : $\boxed{\text{Distr}}$ ($\boxed{\text{2nd}}$ / $\boxed{\text{Vars}}$). On descend avec la flèche :

- Pour calculer $P(X = k)$: $\boxed{BinomFdp(}$ (0)
- Pour calculer $P(X \leq k)$: $\boxed{BinomFRép(}$ (A)
- On utilise la syntaxe suivante $BinomFdp(n, p, k)$ ou $BinomFRép(n, p, k)$ avec :

  . k : Nombre de succès

  . n : Nombre d'épreuves

  . p : Probabilité du succès

Exemple 4 : Notre joueur de tennis effectue une série de 10 services. On note X le nombre de succès.

1) Quelle est la loi suivie par la variable X ?

   X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0.75 : $X \sim B(10; 0.75)$

2) Calculer la probabilité qu'il réussisse :

   . Exactement 5 services : $P(X = 5) = 0.058$

   . Au maximum 8 services : $P(X \leq 8) = 0.756$

   . Au moins 8 services : $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.474 = 0.526$

Propriété 1 : Si $X \sim B(n; p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

Exemple 5 : Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable X de l'exemple précédent.

$E(X) = 10 \times 0.75 = 7.5$. Le nombre moyen de 1er service réussi par le joueur est 7.5

$V(X) = 10 \times 0.75 \times (1 - 0.75) = 10 \times 0.75 \times 0.25 = 1.875$ d'où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.875} \approx 1.37$

2 – De la loi binomiale vers la loi normale

Problématique : Lors d'un tournoi, notre joueur de tennis effectue 1000 engagement. Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins 780 services ?

Soit X le nombre de services réussis, X suit la loi binomiale $B(1000; 0.75)$. On calcule $P(X \geq 780)$.

$P(X \geq 780) = 1 - P(X \leq 779)$. Problème : La calculatrice affiche une erreur.

Lorsque n devient grand, le calcul de $P(X = k)$ necessite de manipuler des très grands nombres que la calculatrice et même l'ordinateur ne peut pas manipuler. Nous allons introduire un nouvel outil mathématique permettant de contourner ce problème.

L'idée est d'approcher l'histogramme de la loi binomiale par une fonction continue afin d'obtenir une fonction de densité. On pourra alors approximer la valeur des probabilités à l'aide d'une intégrale.

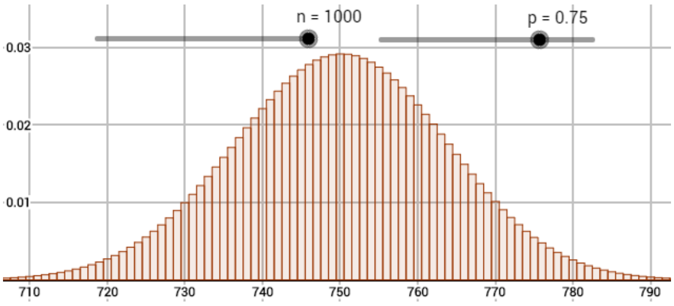


Figure 1 : Histogramme de la loi $X \sim B(n; p)$

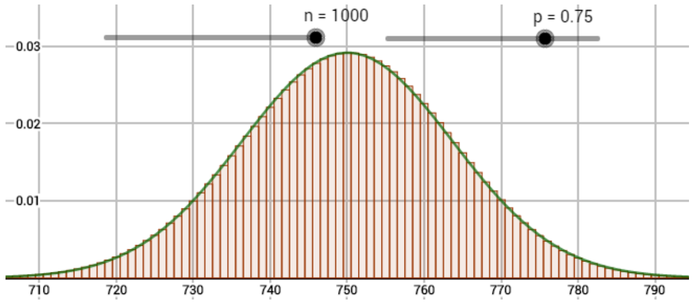


Figure 2 : Approximation par une fonction continue.

Cette courbe « en cloche » est la courbe d'une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ par la formule :

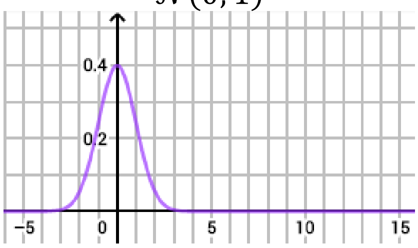
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ avec } \mu = E(X) = np \text{ et } \sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

On introduit ainsi une nouvelle loi, appelée loi normale dont la densité est la fonction f :

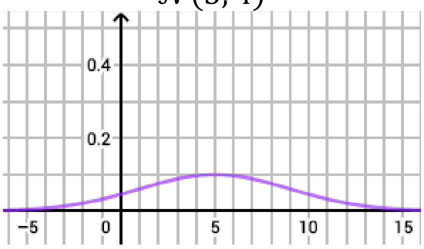
Définition 4 : Soient μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$. On dit que X suit la **loi normale** de paramètres μ et σ, et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$, si X admet pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Remarque : La loi $\mathcal{N}(0; 1)$ est dite **centrée** ($\mu = 0$) et **réduite** ($\sigma = 1$). Sa densité est : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$

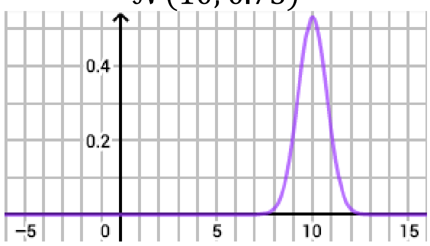
$\mathcal{N}(0; 1)$



$\mathcal{N}(5; 4)$



$\mathcal{N}(10; 0.75)$



Théorème 1 : Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ la loi binomiale $B(n; p)$ peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Remarque : μ et σ correspondent à l'espérance et à l'écart-type d'une variable suivant la loi $B(n; p)$

Exemple 6 : Avec $B(1000; 0.75)$: $n \geq 30$, $np = 750 \geq 5$ $n(1-p) = 250 \geq 5$. $\mu = 750$ et $\sigma \approx 13.69$.

Ainsi la loi binomiale $B(1000; 0.75)$ peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(750; 13.69)$

3 – Propriétés de la loi normale

Propriété 2 : Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors pour tous nombres réels c et d tels que $c \leq d$ on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dt$$

Remarque : Le calcul de cette intégrale n'est pas envisageable en classe de Terminale. En pratique, on utilise la calculatrice pour déterminer $P(c \leq X \leq d)$.

Casio : $\boxed{\text{Menu}}$ / $\boxed{STAT}$ puis $\boxed{DIST}$ $(F5)$/ $\boxed{NORM}$ $(F5)$

- Pour calculer $P(c \leq X \leq d)$: $\boxed{Ncd}$ $(F2)$
- On complète de la façon suivante :

. $Lower$: Borne inférieure (c)

. $Upper$: Borne supérieure (d)

. σ : Ecart-type (σ)

. μ : Moyenne (μ)

TI : $\boxed{\text{Distr}}$ ($\boxed{\text{2nd}}$ / $\boxed{\text{Vars}}$). On descend avec la flèche :

- Pour calculer $P(c \leq X \leq d)$: $\boxed{normalFRép(}$ (1)
- On utilise la syntaxe $normalFRép(c, d, \sigma, \mu)$ où :

. c : Borne inférieure (c)

. d : Borne supérieure (d)

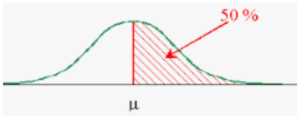
. σ : Ecart-type (σ)

. μ : Moyenne (μ)

Exemple 7 : Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ alors $P(-1 \leq X \leq 3) \approx 0.84$

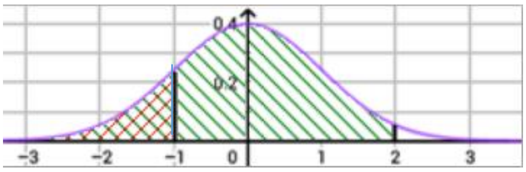
Propriété 3 : Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0.5$

Remarque : Cette propriété vient du fait que la courbe de la densité f est symétrique par rapport à l'axe $x = \mu$ et que l'aire totale sous la courbe de f est égal à 1.



Exemple 8 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. Calculer les probabilités suivantes :

- $P(X \leq 2) = P(X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 2) \approx 0.5 + 0.47 = 0.97$
- $P(X < -1) = P(X \leq 0) - P(-1 \leq X \leq 0) \approx 0.5 - 0.34 = 0.16$



Exemple 9 : Réponse à la problématique.

Soit X le nombre de services réussis. On a vu que l'on pouvait approximer la loi de X par la loi $\mathcal{N}(750; 13.69)$

On veut calculer $P(X \geq 780) = 1 - P(X \leq 780)$.

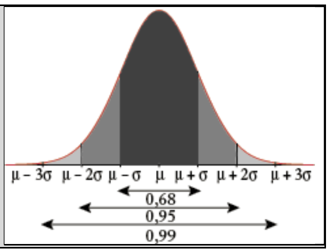
Or $P(X \leq 800) = P(X \leq 750) + P(750 \leq X \leq 780) = 0.5 + 0.486 = 0.986$

Donc $P(X \geq 780) = 1 - 0.986 = 0.014$. Il y a moins de 2% de chance qu'il réussisse plus de 780 services

Propriété 4 : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors $E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$

Propriété 5 : (Intervalles remarquables) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors on a :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.683$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.954$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$



Exemple 10 : Proposer un intervalle qui encadre le nombre de services réussis avec une probabilité de 95 %

$P(750 - 2 \times 13.69 \leq X \leq 750 + 2 \times 13.69) \approx 0.954$ donc l'intervalle $I = [722\,;778]$ convient.

Exercice 1 **(Bac STI2D Polynésie 2014)**

Les résultats seront arrondis à $\mathbf{10^{-3}}$*près.*
Une entreprise produit en grande quantité des emballages alimentaires en polypropylène. Elle utilise pour cela la technique du thermoformage, qui consiste à chauffer une plaque de plastique puis à la former à l'aide d'un moule. Lors du refroidissement, la pièce rétrécit légèrement mais conserve la forme du moule. L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité d'une production de boîtes cubiques.

A. Loi normale

Une boîte est jugée conforme lorsque la mesure de son arête, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [16,7 ;17,3]. La mesure de l'arête d'une boîte est modélisée par une variable aléatoire C qui suit la loi normale d'espérance 17 d'écart type $0,14$.

1. Calculer $P(16,7 \leqslant C \leqslant 17,3)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

B. Loi binomiale

L'entreprise conditionne ces boîtes par lots de 200. On prélève au hasard une boîte dans la production. On note p la probabilité de l'évènement : « la boîte prélevée au hasard dans la production est non conforme ». On prélève au hasard 200 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 200 boîtes, associe le nombre de boîtes non conformes qu'il contient. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 200 et p, et, qu'en moyenne chaque lot de 200 boîtes en contient 6 non conformes.

1. Justifier que $p = 0,03$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux boîtes non conformes dans ce lot de 200 boîtes.

Exercice 2 **(Bac STI2D Nouvelle Calédonie 2013)**

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires en argent. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre et l'épaisseur (exprimés en millimètres) sont conformes afin de les ranger dans un étui spécifique.
Dans cet exercice, les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-3} près. **PARTIE A :**
On suppose dans cette partie que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à $0,9$. Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 10 pièces, au moins 8 pièces soient conformes.

PARTIE B :
Les pièces sont fabriquées par une machine automatique. Soit M la variable aléatoire qui à chaque pièce prélevée au hasard associe son diamètre. On suppose que M suit la loi normale d'espérance 80 et d'écart type $0,6$.

1. Déterminer la probabilité $P(79 \leqslant M \leqslant 81)$.
2. Quelle est la probabilité que le diamètre d'une pièce prélevée au hasard soit supérieur à 80 ?

Exercice 3 **(Bac STI2D Polynésie 2013)**

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près.* Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'exploitation de divers outils mathématiques pour analyser la qualité de cette production.

A. Loi normale

Une pièce est conforme lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [74,4 ;75,6]. On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type $0,25$.

1. Calculer $P(74,4 \leqslant L \leqslant 75,6)$.
2. Quelle valeur doit-on donner à h pour avoir $P(75-h \leqslant L \leqslant 75+h) = 0,95$?

B. Loi binomiale

Les pièces produites par l'entreprise sont livrées par lots de 20. On note D l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ». On suppose que $P(D) = 0,02$. On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $0,02$.
2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
4. Calculer l'espérance mathématiques, $E(X)$, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.

Loi binomiale, Loi Normale – Fiche d'exercices

Ex 1 QCM (Tiré de divers sujet bac)

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
Sachant que $P(X \in [189 ; 191]) \approx 0{,}95$, μ et σ peuvent prendre les valeurs :

a. $\mu = 1$ et $\sigma = 190$ **b.** $\mu = 190$ et $\sigma = 1$

c. $\mu = 190$ et $\sigma = 0{,}5$ **d.** $\mu = 0{,}5$ et $\sigma = 190$

2. La variable X suit la loi normale d'espérance 3 et d'écart type 6.
La probabilité $P(X < 3)$ vaut :

a. 3 **b.** 0,5 **c.** 0 **d.** 0,997

Ex 2 Paquets de sucre (Tiré du bac Polynésie 2015)

Une entreprise achète du sucre et le revend après conditionnement à des grossistes pour le marché de la grande distribution.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Une machine de l'usine conditionne des paquets de sucre en poudre de 1 kg.
La masse M en gramme d'un paquet est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne m = 1000 et d'écart-type σ = 7.
- **a.** Calculer $P(995 \leq M \leq 1005)$.
- **b.** Un paquet est refusé si sa masse est inférieure à 990 grammes.
Quelle est la probabilité pour qu'un paquet conditionné par cette machine soit refusé ?

Dans la suite de l'exercice, on arrondit à 0,08 la probabilité p pour qu'un paquet conditionné dans l'usine soit refusé, ainsi $p = 0{,}08$.
On s'intéresse au stock journalier de paquets conditionnés dans l'usine.

2. On prélève au hasard 100 paquets parmi le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de paquets à rejeter dans cet échantillon.
- **a.** Quelle est la loi de probabilité de X ? On donnera ses paramètres.
- **b.** Quelle est la probabilité qu'exactement 3 paquets parmi ces 100 paquets soient refusés ?
- **c.** Calculer la probabilité que, parmi ces 100 paquets, 5 ou plus soient refusés.

Ex 3 Thyroïde (Tiré du bac Antilles-Guyanne 2017)

Pour dépister les maladies de la glande thyroïde chez un patient, on mesure le taux d'une hormone appelée TSH.
Un médecin étudie les dossiers médicaux des patients de son hôpital.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à un dossier pris au hasard dans cet hôpital, associe le taux de TSH du patient correspondant.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 2{,}2$ et d'écart type $\sigma = 0{,}9$.

1. Déterminer $P(X < 3)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un dossier médical pris au hasard dans cet hôpital présente un taux de TSH compris entre 1,5 et 3,5.
3. Pour les dossiers médicaux dont le taux de TSH est supérieur à 4, les médecins prescrivent des examens complémentaires au patient.

   Déterminer la probabilité qu'un dossier médical pris au hasard dans cet hôpital corresponde à un patient qui nécessite des examens complémentaires.

Ex 4 Plats préparés sous vide (Tiré du bac Antilles-Guyanne 2015)

L'entreprise BUENPLATO produit en grande quantité des plats préparés sous vide.

1. Sur les emballages, il est précisé que la masse des plats préparés est de 400 grammes. Un plat est conforme lorsque sa masse, exprimée en gramme, est supérieure à 394 grammes.

On note M la variable aléatoire qui, à chaque plat prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en gramme. On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale d'espérance 400 et d'écart type 5.

- **a.** Déterminer la probabilité qu'un plat prélevé au hasard ait une masse comprise entre 394 et 404 grammes.
- **b.** Déterminer la probabilité qu'un plat soit conforme.

2. Les plats préparés sont livrés à un supermarché par lot de 300.
On arrondit la probabilité de l'événement « un plat préparé prélevé au hasard dans la production n'est pas conforme » à 0,12.
On prélève au hasard 300 plats dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 300 plats, associe le nombre de plats préparés non conformes qu'il contient.

- **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- **b.** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et en donner une interprétation.
- **c.** Calculer la probabilité que dans un échantillon de 300 plats prélevés au hasard, au moins 280 plats soient conformes.

Ex 5 **Jus de fruits (Tiré du bac Métropole 2015)**

Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

L'usine OCEFRAIS embouteille des jus de fruits. L'étiquette de la bouteille indique 1,5 litre de jus de fruits. Le volume de la bouteille est de 1,55 litre.

A l'embouteillage, le volume de jus de fruits versé dans une bouteille est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,015$.

1. a. L'une des trois figures donne la courbe représentative C_f de la densité f de cette loi normale. Indiquer sur la copie le numéro de la figure correspondante en expliquant votre choix.

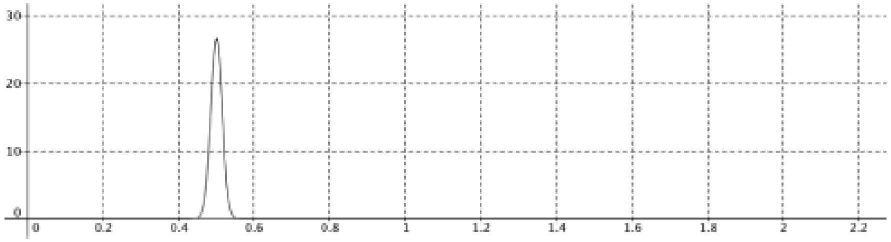


Figure 1

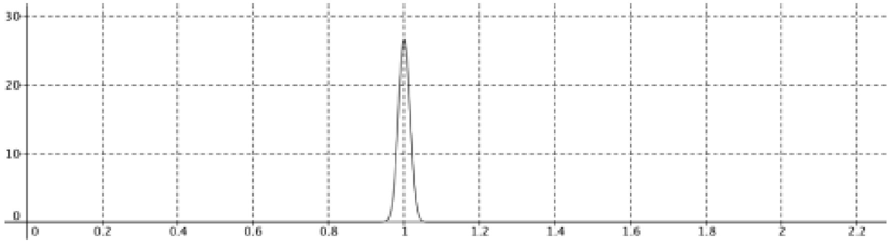


Figure 2

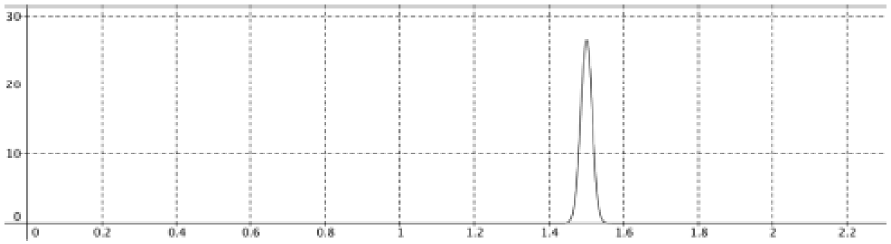


Figure 3

   b. Déterminer $P(1,485 \leqslant X \leqslant 1,515)$.

2. On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits.

   a. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement 1,48 litre de jus de fruits ?

   b. Calculer la probabilité que cette bouteille contienne entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits.

   c. Quelle est la probabilité que cette bouteille déborde sur la chaîne d'embouteillage ? On rappelle que toutes les bouteilles utilisées ont un volume de 1,55 litre.

Ex 6 **Jus de fruits (Tiré du bac Nouvelle-Caledonie 2015)**

Les questions peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

1. Dans une usine, une machine remplit automatiquement avec de l'huile de moteur des bidons pouvant contenir au maximum 102 litres. Pour pouvoir être commercialisé, un bidon doit contenir au moins 98 litres d'huile.

   La quantité d'huile, exprimée en litres, fournie par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 0,8$.

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement « $X > 102$ » et interpréter ce résultat.

   b. Déterminer le pourcentage de bidons qui ne pourront pas être commercialisés en expliquant votre démarche.

2. On estime que 99,4 % des bidons sont remplis correctement.

   Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 30 bidons prélevés au hasard dans la production de l'usine, associe le nombre de bidons non correctement remplis. Le stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

   Après avoir précisé la loi suivie par Y, calculer la probabilité qu'il y ait au plus un bidon non correctement rempli dans un lot de 30 bidons.

Ex 7 **Pneumatiques (Tiré du bac Antilles-Guyanne 2016)**

Un manufacturier de pneumatiques produit des pneus d'avions en grande quantité.

Il s'engage à livrer des produits spécifiques aux avionneurs de masse maximum garantie de 124 kg. Ces pneus doivent supporter une charge nominale de 10 tonnes, des vitesses pouvant aller jusqu'à 420 km.h^{-1} et des températures instables allant de −40 °C (en altitude) à 250 °C (au moment du décollage).

On note M la variable aléatoire qui, à chaque pneu prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en kilogramme. On admet que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu = 121,37$ et d'écart type $\sigma = 0,42$.

1. Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg comprise entre 120,95 et 121,79.
2. Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg supérieure à 122,63.

Ex 8 Plats préparés sous vide (Tiré du bac Antilles-Guyanne 2015)

L'entreprise BUENPLATO produit en grande quantité des plats préparés sous vide.

1. Sur les emballages, il est précisé que la masse des plats préparés est de 400 grammes. Un plat est conforme lorsque sa masse, exprimée en gramme, est supérieure à 394 grammes.

On note M la variable aléatoire qui, à chaque plat prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en gramme. On suppose que la variable aléatoire M suit la loi normale d'espérance 400 et d'écart type 5.

a. Déterminer la probabilité qu'un plat prélevé au hasard ait une masse comprise entre 394 et 404 grammes.
b. Déterminer la probabilité qu'un plat soit conforme.

2. Les plats préparés sont livrés à un supermarché par lot de 300.
On arrondit la probabilité de l'événement « un plat préparé prélevé au hasard dans la production n'est pas conforme » à 0,12.
On prélève au hasard 300 plats dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 300 plats, associe le nombre de plats préparés non conformes qu'il contient.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et en donner une interprétation.
c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 300 plats prélevés au hasard, au moins 280 plats soient conformes.

Ex 9 Ascensceurs (Tiré du bac Polynésie 2018)

Une entreprise assure la maintenance d'un parc de 75 ascenseurs qui fonctionnent de façon indépendante.
On considère dans cette partie que la probabilité qu'un ascenseur du parc tombe en panne un jour donné est 0,08 .

1. **a)** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) Calculer la probabilité que 5 ascenseurs tombent en panne un jour donné.
c) Calculer la probabilité qu'au moins 5 ascenseurs tombent en panne un jour donné.
d) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

2. On appelle Y la variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 6$ et d'écart-type $\sigma = 2{,}349$.
On décide d'approcher la loi de X par la loi de Y .

En utilisant cette nouvelle loi, déterminer la probabilité que :
a) entre 5 et 10 ascenseurs tombent en panne un jour donné.
b) plus de 10 ascenseurs tombent en panne un jour donné.

Ex 10 Porte blindée (Tiré du bac Métropole 2018)

Un industriel commercialise des portes blindées. Il projette de lancer un nouveau modèle de portes blindées : les portes « SECUR ». Équipées d'un digicode et d'une caméra, elles seront donc plus sécurisées que celles déjà existantes sur le marché.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Avant de débuter son projet, l'industriel s'intéresse à une étude portant sur le prix de vente des portes blindées classiques existantes.

Le prix de vente, en euros, d'une porte blindée classique est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3000$ et d'écart type $\sigma = 750$.

1. Déterminer la probabilité $P(1500 \leqslant X \leqslant 4500)$.

2. Déterminer la probabilité qu'une porte blindée classique coûte plus de 2500 euros.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant où a désigne un nombre entier naturel.

a	$P(X \leqslant a)$
3950	0,8974
3960	
3970	

b. Déterminer le montant minimal, à l'euro près, tel qu'au moins 90% des portes blindées classiques aient un prix de vente inférieur à ce montant.

c. L'industriel estime que le prix de vente du modèle de porte blindée équipée « SECUR » ne devra pas dépasser de plus de 15% le montant minimal précédent. Quel prix de vente maximal M, à l'euro près, peut-il envisager pour une porte du modèle « SECUR » ?