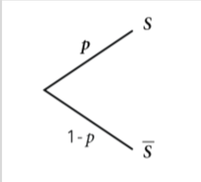
Chapitre PS3 : Loi Binomiale, Loi Normale

1 – Loi binomiale

Définition 1 : Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues possibles :



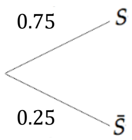
- « **Succès** », noté « S » , dont la probabilité de réalisation est p.
- « **Échec** », noté « E » ou « $\bar{S}$ », dont la probabilité de réalisation est $q = 1 - p$.

Exemple 1 : Un joueur de tennis professionnel possède un taux de réussite au service de 75 %.

La réalisation d'un service est une épreuve de Bernouilli de paramètre $p = \frac{3}{4} = 0.75$

On a pour succès $S =$ « Réussir le service » avec $P(S) = 0.75$

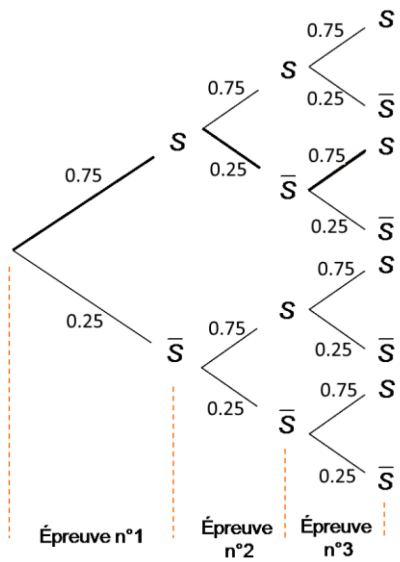
On a pour echec $\bar{S} =$ « Rater le service » avec $P(\bar{S}) = 1 - 0.75 = 0.25$



Définition 2 : Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p, est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, et de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Remarque : On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur celui de l'autre.

Exemple 2 : Notre joueur de tennis réalise une série de trois services consécutifs. On considère que le résultat d'un service n'influe pas sur les services suivants. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0.75$. On peut représenter un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré :



1) Quelle est la probabilité qu'il réussisse ces trois services.

   $P(SSS) = 0.75 \times 0.75 \times 0.75 = 0.75^3 \approx 0.421$

2) Quelle est la probabilité qu'il rate tous ces services

   $P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 0.25^3 \approx 0.016$

3) Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement un service.

   $P(S\bar{S}\bar{S}) + P(\bar{S}S\bar{S}) + P(\bar{S}\bar{S}S) = 3 \times 0.75 \times 0.25^2 = 0.141$

4) Quelle est la probabilité qu'il rate exactement un service.

   $P(\bar{S}SS) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S}) = 3 \times 0.75^2 \times 0.25 = 0.421$

5) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins un service.

   $P(au\ moins\ un\ succes) = 1 - P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 1 - 0.015 = 0.985$

Rappel : Dans un arbre pondéré, on peut utiliser les 3 règles suivantes :

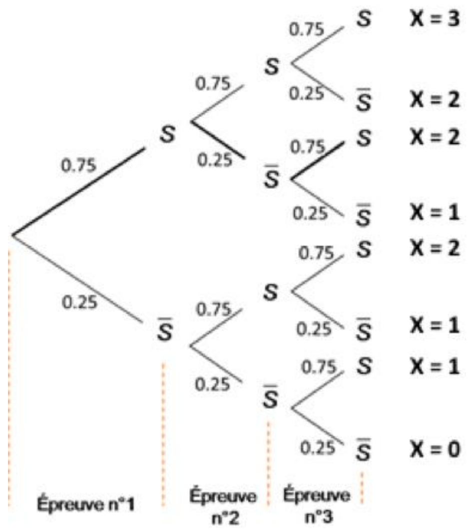
- Règle 1 : À partir d'un même nœud, la somme des probabilités est égale à 1.
- Règle 2 : Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.
- Règle 3 : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins

Définition 3 : Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des n épreuves. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \sim B(n;p)$.

Remarque :

- X est nombre entier qui est compris entre 0 et n.
- Sa valeur dépend du hasard : On dit que X est une **variable aléatoire.**
- On note $P(X = k)$ la probabilité d'obtenir k succès, lors de la répétition des n épreuves.
- Donner la **loi** de X, c'est préciser avec quelle probabilité la variable X prend telle ou telle valeur.

Exemple 3 : On note X le nombre de services réussis sur les trois services réalisés. On a donc $X \sim B(3; 0.75)$

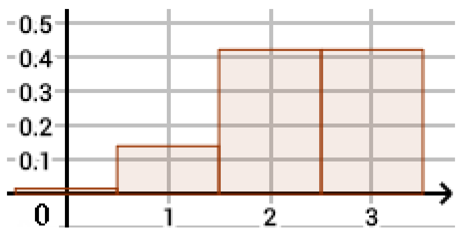


1) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3

2) Calculer la loi de X puis la représenter avec un histogramme.

Valeurs	0	1	2	3	**Total**
Probabilités	0.016	0.141	0.422	0.422	1



- $P(X = 0) = 0.016$
- $P(X = 1) = 0.141$
- $P(X = 2) = 0.442$
- $P(X = 3) = 0.442$

Lorsque le nombre de répétition est grand, on utilise la calculatrice pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$

Casio : $\boxed{\text{Menu}}$ / $\boxed{STAT}$ puis $\boxed{DIST}$ $(F5)$/ $\boxed{BINM}$ $(F5)$
- Pour calculer $P(X = k)$: $\boxed{Bpd}$ $(F1)$
- Pour calculer $P(X \leq k)$: $\boxed{Bcd}$ $(F2)$
- On complète de la façon suivante :
  . $Data$: $\boxed{Var}$ $(F2)$
  . x : Nombre de succès (k)
  . $Numtrial$: Nombre d'épreuves (n)
  . p : Probabilité du succès (p)

TI : $\boxed{\text{Distr}}$ ($\boxed{\text{2nd}}$ / $\boxed{\text{Vars}}$). On descend avec la flèche :
- Pour calculer $P(X = k)$: $\boxed{BinomFdp(}$ (0)
- Pour calculer $P(X \leq k)$: $\boxed{BinomFRép(}$ (A)
- On utilise la syntaxe suivante $BinomFdp(n, p, k)$ ou $BinomFRép(n, p, k)$ avec :
  . k : Nombre de succès
  . n : Nombre d'épreuves
  . p : Probabilité du succès

Exemple 4 : Notre joueur de tennis effectue une série de 10 services. On note X le nombre de succès.

1) Quelle est la loi suivie par X ? X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0.75 : $X \sim B(10; 0.75)$

2) Calculer la probabilité qu'il réussisse :

   . Exactement 5 services : $P(X = 5) = 0.058$

   . Au maximum 8 services : $P(X \leq 8) = 0.756$

   . Au moins 8 services : $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.474 = 0.526$

Propriété 1 : Si $X \sim B(n;p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Exemple 5 : Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable X de l'exemple précédent.

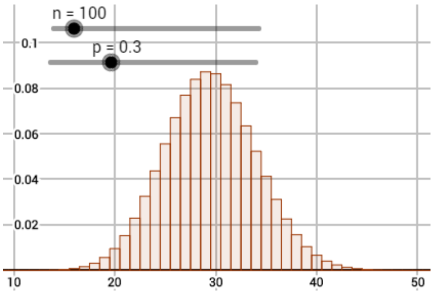
$E(X) = 10 \times 0.75 = 7.5$. Le nombre moyen de 1er service réussi par le joueur est 7.5

$V(X) = 10 \times 0.75 \times (1 - 0.75) = 10 \times 0.75 \times 0.25 = 1.875$ d'où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.875} \approx 1.37$

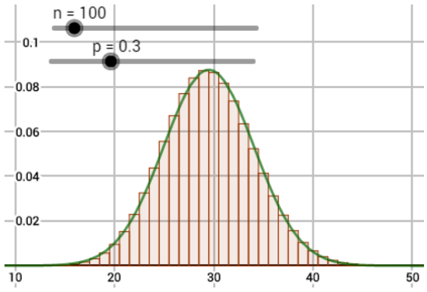
2 – De la loi binomiale vers la loi normale

Lorsque n est grand, l'histogramme d'une loi binomiale $B(n;p)$ peut être approché par une courbe continue. Cette courbe « en cloche » permet de définir une nouvelle loi de probabilité appelée **loi Normale.**

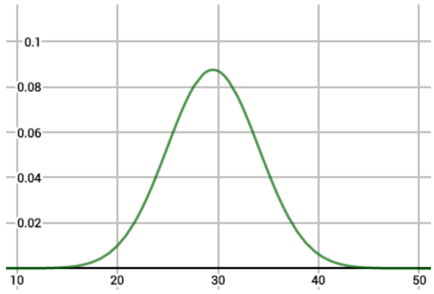
Exemple 6 : Approximation de la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0.3$



Histogramme de la loi binomiale $B(100; 0.3)$



Approximation par une courbe continue « en cloche »



Nouvelle loi de probabilité : La loi Normale

La **loi normale** est caractérisée par deux paramètres :

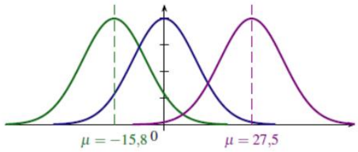
- Son espérance, noté μ, qui donne la valeur moyenne.
- Son écart-type, noté σ, qui donne la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

La loi Normale de paramètres μ et σ est notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

La courbe de la loi normale ne dépend que de ces deux paramètres :

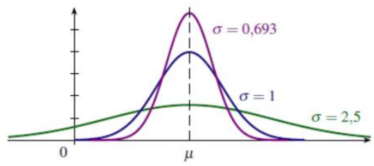
- Paramètre μ :

Le paramètre μ est un paramètre de **position** : Il donne la valeur en laquelle la courbe est centrée. La courbe est **symétrique** par rapport à l'axe $x = \mu$



- Paramètre σ :

Le paramètre σ est un paramètre de **dispersion** : Plus σ est grand plus les valeurs seront dispersées autour de la moyenne μ.



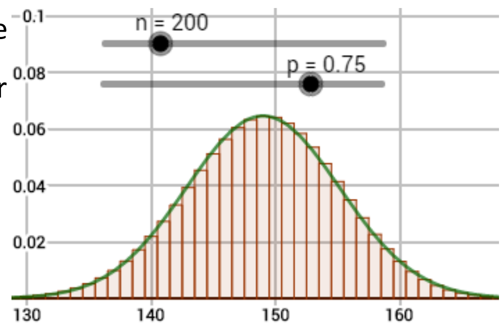
Remarque : La loi $\mathcal{N}(0;1)$ est dite **centrée** ($\mu = 0$) et **réduite** ($\sigma = 1$).

Définition 4 : On dit qu'une variable X suit la loi normale de paramètres μ et σ et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ si pour tout intervalle I on utilise la courbe en cloche d'espérance μ et d'écart-type σ pour calculer $P(X \in I)$

Théorème 1 : Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ la loi binomiale $B(n;p)$ peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Remarque : μ et σ correspondent à l'espérance et à l'écart-type d'une variable suivant la loi $B(n;p)$

Exemple 7 : A l'entrainement, notre joueur de tennis effectue une série de 200 services. On note X le nombre de services réussis. Approximer la loi de X à l'aide d'une loi normale.



On a $X \sim B(200; 0.75)$ avec $n \geq 30$ et $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

$\mu = 200 \times 0.75 = 150$ et $\sigma = \sqrt{200 \times 0.75 \times 0.25} \approx 6.12$.

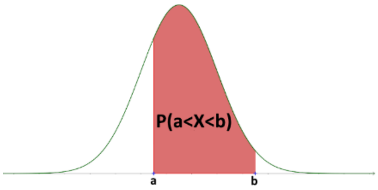
La loi de X peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(150; 6.12)$

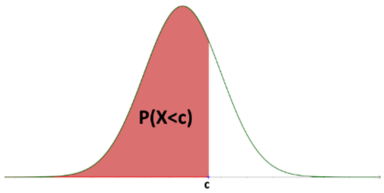
3 – Propriétés de la loi normale

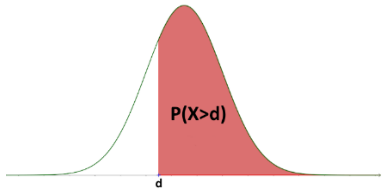
Propriété 2 : Soit X suivant une loi normale.

• La probabilité $P(a < X < b)$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de la loi normale, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

• La probabilité $P(X < c)$ (resp. $P(X > d)$) est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de la loi normale, et à gauche (resp. à droite) de la droite d'équation $x = c$. (resp. $x = d$)







Remarque : On en déduit que pour tout nombre k, $P(X = k) = 0$. De même, on a $P(X \leq c) = P(X < c)$

En pratique, on utilise la calculatrice pour déterminer $P(a \leq X \leq b)$:

Casio : $\boxed{\text{Menu}}$ / $\boxed{STAT}$ puis $\boxed{DIST}$ $(F5)$/ $\boxed{NORM}$ $(F5)$
• Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$: $\boxed{Ncd}$ $(F2)$
• On complète de la façon suivante :
. $Lower$: Borne inférieure (a)
. $Upper$: Borne supérieure (b)
. σ : Ecart-type (σ)
. μ : Moyenne (μ)

TI : $\boxed{\text{Distr}}$ ($\boxed{\text{2nd}}$ / $\boxed{\text{Vars}}$). On descend avec la flèche :
• Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$: $\boxed{normalFRép(}$ (1)
• On utilise la syntaxe $normalFRép(a, b, \sigma, \mu)$ où :
. c : Borne inférieure (a)
. d : Borne supérieure (b)
. σ : Ecart-type (σ)
. μ : Moyenne (μ)

Exemple 8 : Si $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$ alors $P(-1 \leq X \leq 3) \approx 0.84$

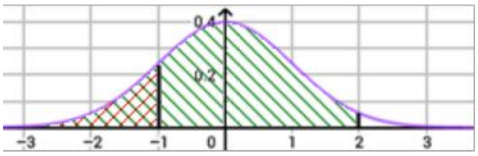
Propriété 3 : On considère une variable X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$

• L'aire totale comprise entre la courbe de loi normale et l'axe des abscisses est égale à 1

• Par symétrie de la courbe par rapport à l'axe $x = \mu$, on a $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0.5$

• $P(X \geq d) = 1 - P(X \leq d)$ et $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

Exemple 9 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$. Calculer les probabilités suivantes :



• $P(X \leq 2) = P(X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 2) \approx 0.5 + 0.47 = 0.97$

• $P(X < -1) = P(X \leq 0) - P(-1 \leq X \leq 0) \approx 0.5 - 0.34 = 0.16$

• $P(-1 < X < 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq -1) \approx 0.97 - 0.16 \approx 0.91$

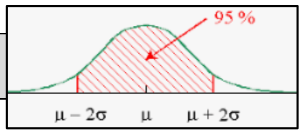
Exemple 10 : Calculer la probabilité que notre joueur réussisse au moins 160 services sur les 200 réalisés

Soit X le nombre de services réussis. On a vu que $X \sim \mathcal{N}(150; 6.12)$. On veut calculer $P(X \geq 160)$

Or $P(X \leq 160) = P(X \leq 150) + P(150 \leq X \leq 160) = 0.5 + 0.449 = 0.949$

Donc $P(X \geq 160) == 1 - P(X \leq 160) = 1 - 0.949 = 0.051 \approx 5\%$

Propriété 5 : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ alors $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.954$



Exemple 11 : Proposer un intervalle qui encadre, sur les 200 services réalisés par le joueur, le nombre de services réussis, avec une probabilité d'au moins 95 %.

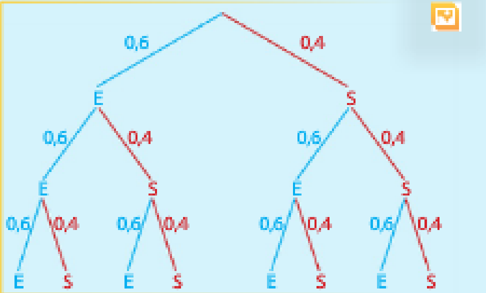
$P(150 - 2 \times 6.12 \leq X \leq 750 + 2 \times 6.12) \approx 0.954$ donc $I = [137 ; 153]$ convient.

Loi binomiale, Loi Normale – Fiche d'exercices

Loi binomiale

8 On répète trois fois la même expérience aléatoire à deux issues S et E. On sait que le **succès S** a toujours la même probabilité $p = 0{,}4$.

Le schéma de Bernoulli ci-dessous représente la situation.



On note X la variable aléatoire associée au nombre de succès obtenus à la fin des trois expériences.

1. a) D'après l'arbre, donner l'ensemble des valeurs k prises par la variable aléatoire X.

b) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

2. a) Donner les listes conduisant à un succès exactement.

b) Calculer la probabilité de la liste E-S-E.

c) Calculer la probabilité $P(X = 1)$.

Pour les QCM **9** et **10**, on reprend la situation de l'exercice **8**. **Pour chaque question, trouver la seule bonne réponse.**

9 **1.** $P(X = 2)$ est égal à :

a) 0,096 b) 0,288 c) 0,16

2. $P(X \leqslant 2)$ est égal à :

a) 0,936 b) 0,72 c) 0,288

10 **1.** Le contraire de l'événement « obtenir au moins un succès » se note :

a) $\{X \geqslant 1\}$ b) $\{X \leqslant 1\}$ c) $\{X = 0\}$

2. L'espérance E(X) de cette loi binomiale est :

a) 0,72 b) 1,2 c) 1,8

12 Une boîte contient 100 cartons dont 20 rouges et 80 verts. On tire au hasard trois fois de suite un carton de la boîte et on remet le carton dans la boîte après chaque tirage. On s'intéresse au nombre de cartons verts obtenus. On note :

V : « obtenir un carton vert » ;
R : « obtenir un carton rouge ».

La variable aléatoire X est associée au nombre de cartons verts tirés.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois cartons verts.

b) Calculer la probabilité $P(X = 2)$.
Interpréter concrètement le résultat.

3. Calculer $P(X = 0)$. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un carton vert.

17 CALC L'intéressement est une mesure qui vise à associer les salariés aux résultats ou performances d'une PME, en leur versant une prime.
Dans l'entreprise Marion, la moitié des salariés reçoit une prime d'intéressement.
On interroge au hasard 80 salariés de cette entreprise.
On appelle X la variable aléatoire associée au nombre de salariés, parmi les 80 interrogés, qui perçoivent la prime dans cette PME.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

2. a) Quelle est la probabilité qu'au plus 45 des salariés interrogés reçoivent cette prime ?

b) En déduire $P(X > 45)$.

16 CALC En France, 80 % des enfants de 2 à 5 ans sont scolarisés.
Sur 150 enfants âgés de 2 à 5 ans pris au hasard, calculer la probabilité qu'exactement 125 d'entre eux soient scolarisés.

Loi Normale

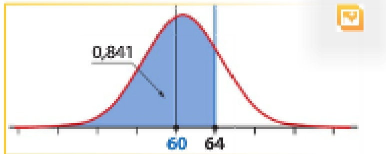
CALC Pour les exercices **31** à **36**, X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ donnés.
À la calculatrice, calculer les probabilités demandées.
Arrondir les résultats à 10^{-4} près.

31 Espérance $\mu = 60$ et écart type $\sigma = 8$.
Calculer $P(50 \leqslant X \leqslant 70)$ et $P(52 \leqslant X \leqslant 68)$.

32 Espérance $\mu = 60$ et écart type $\sigma = 8$.
Calculer $P(59 \leqslant X \leqslant 61)$ et $P(X > 47)$.

33 Espérance $\mu = 20$ et écart type $\sigma = 1$.
Calculer $P(18 \leqslant X \leqslant 22)$ et $P(20{,}5 \leqslant X \leqslant 22)$.

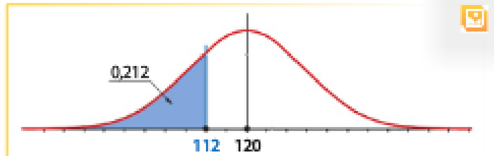
38 La courbe en cloche ci-dessous représente la courbe de densité de la loi normale X d'espérance $\mu = 60$ et d'écart type $\sigma = 4$.



Elle est obtenue à l'aide d'un logiciel et on lit sur la figure la probabilité $P(X \leqslant 64) = 0{,}841$.
En utilisant les éléments de symétrie de la courbe, en déduire :

a) $P(X > 64)$ b) $P(X \leqslant 60)$
c) $P(56 \leqslant X \leqslant 64)$ d) $P(60 \leqslant X \leqslant 64)$

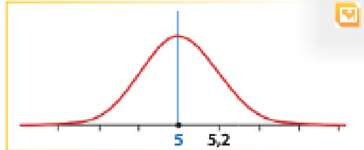
40 La courbe en cloche ci-dessous représente la courbe de densité de la variable aléatoire X d'espérance $\mu = 120$ et d'écart type $\sigma = 10$.
On lit sur la figure $P(X \leqslant 112) \approx 0{,}212$.



Utiliser la courbe pour en déduire :

a) $P(X > 112)$ b) $P(112 \leqslant X \leqslant 120)$
c) $P(112 \leqslant X \leqslant 128)$ d) $P(X > 128)$

41 Une entreprise fabrique des petites boîtes en carton. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la hauteur d'une boîte en carton.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 5$ cm et d'écart type $\sigma = 0{,}2$ cm.



Dans chaque question, reproduire la courbe de densité ci-dessus et représenter la probabilité demandée. Traduire cette probabilité en utilisant les notations $P(X \leqslant k)$ ou $P(a \leqslant X \leqslant b)$.
On ne demande pas de calculer.

a) Probabilité que la boîte ait une hauteur inférieure ou égale à 5,3 cm.

b) Probabilité que la boîte ait une hauteur comprise entre 4,6 cm et 5,4 cm.

c) Probabilité que la boîte ait une hauteur supérieure à 5,4 cm.

42 CALC À l'aide de la calculatrice, ou d'une feuille de calcul, calculer les probabilités citées dans l'exercice **41** précédent, arrondies à 10^{-4} près.

44 CALC Un jeu vidéo consiste à combattre un dragon pendant une heure. Les concepteurs ont estimé que le temps mis par des joueurs confirmés pour gagner le combat suit une loi normale d'espérance 35 min avec un écart type de 6 min.

a) Calculer la probabilité qu'un joueur mette entre 30 et 35 min pour terrasser le dragon.

b) Calculer la probabilité qu'un joueur soit vainqueur contre le dragon en moins de 25 min.

Arrondir les résultats à 10^{-3} près.
On pourra dessiner la courbe de densité de la loi.

53 CALC On considère :
– la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 120$ et d'écart type $\sigma = 15$;
– la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 160$ et d'écart type $\sigma = 15$.

a) Calculer $P(90 \leqslant X \leqslant 150)$.

b) Calculer $P(130 \leqslant Y \leqslant 190)$.

c) Comparer les résultats obtenus.
Pouvait-on prévoir le résultat ? Argumenter.

Exercices type bac

Ex 1 QCM Loi binomiale (Tiré de divers sujet de bac)

1. Une entreprise produit un grand nombre d'ampoules. La proportion d'ampoules défectueuses dans la production est de 0,03. On prélève successivement et de façon indépendante quatre ampoules dans la production.
Une valeur approchée au millième de la probabilité que, parmi ces quatre ampoules, exactement deux soient défectueuses est :
a) 0,250 b) 0,060 c) 0,005

2. À la sortie d'un magasin, on estime que la proportion de clients ayant effectué un achat est de 0,29. On considère un échantillon de 10 clients choisis au hasard et de façon indépendante.
La probabilité arrondie à 0,01 près que parmi ceux-ci, au plus quatre aient effectué un achat est :

a. 0,09 **b.** 0,87 **c.** 0,13 **d.** 0,96

Ex 2 QCM 2 (Tiré du bac Polynésie 2016)

Dans une population, on estime qu'il naît 51% de garçons et 49% de filles.

Dans cette même population si le premier enfant d'une famille est une fille, dans 75% des cas il y a un deuxième enfant. Si le premier enfant est un garçon, il y a un deuxième enfant dans 20% des cas.

On choisit, au hasard dans cette population, une famille ayant au moins un enfant.

On considère les évènements suivants :

F : « le premier enfant de cette famille est une fille »

D : « cette famille a eu un deuxième enfant »

1. On a :
a. P(D) = 0,4695 **b.** P(D) = 0,75 **c.** P(D) = 0,3675 **d.** P(D) = 0,53025

2. La probabilité que la famille choisie ait au moins deux enfants et que le premier soit une fille est :
a. 0,1225 **b.** 0,49 **c.** 0,3675 **d.** 1,24

3. On choisit au hasard 5 familles parmi celles qui ont au moins un enfant. On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces familles ayant eu une fille en premier enfant.
On a alors :
a. $P(Y = 2) = 10$ **b.** $P(Y = 2) \approx 0{,}32$ **c.** $P(Y = 2) = 0{,}98$ **d.** $P(Y = 2) \approx 0{,}16$

Ex 3 Sondage Pratique sportive (Tiré du bac Pondichery 2014)

Un sondage a été effectué auprès de vacanciers sur leurs pratiques sportives pendant leurs congés.
Ce sondage révèle que 45 % des vacanciers fréquentent une salle de sport pendant leurs congés et parmi ceux-ci, 60 % pratiquent la natation.
Parmi les vacanciers qui ne fréquentent pas une salle de sport, 70 % pratiquent la natation.
On choisit un vacancier au hasard. On considère les évènements suivants :

S : « le vacancier choisi fréquente une salle de sport »

N : « le vacancier choisi pratique la natation ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. a. Définir par une phrase l'évènement $S \cap N$.

b. Calculer la probabilité de l'évènement $S \cap N$.

3. Montrer que $p(N) = 0,655$.

4. Calculer $p_N(S)$, la probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement N est réalisé.
On arrondira le résultat à 10^{-4} près.

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre vacanciers pris au hasard. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de ces vacanciers pratiquant la natation pendant leurs congés. Le nombre de vacanciers étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b. Calculer la probabilité que deux vacanciers exactement pratiquent la natation pendant leurs congés. On arrondira le résultat à 10^{-4} près.

Ex 4 Sondage Pratique sportive (Tiré du bac Pondichery 2014)

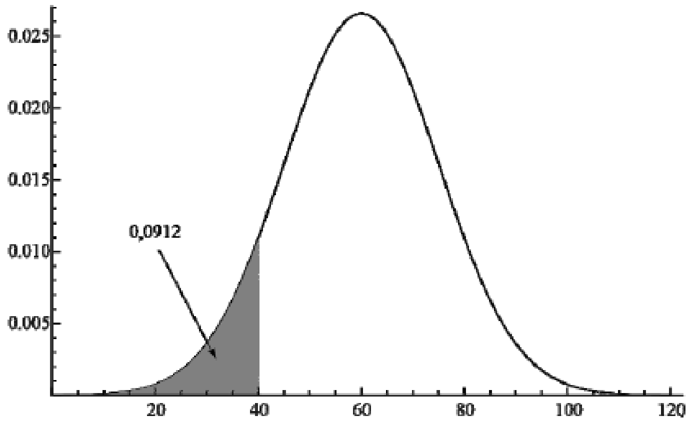
Dans le cadre d'une campagne de sensibilisation au tri des ordures ménagères, une enquête a été menée auprès de 1500 habitants d'une ville.

1. Dans cette question, on choisit au hasard 3 personnes parmi les 1500 interrogées. On suppose que ce choix peut être assimilé à 3 tirages indépendants avec remise. On rappelle que la probabilité p qu'une personne interrogée trie le papier est égale à 0,69.

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que, parmi les 3 personnes interrogées, une au moins trie le papier ?

Ex 5 QCM Loi Normale (Tiré du bac Métropole 2014)

Après réalisation d'une enquête, on estime que le temps en minutes, consacré quotidiennement par un élève à faire ses devoirs scolaires, est une variable aléatoire X suivant une loi normale, d'espérance 60 et d'écart type 15.
L'allure de la courbe de densité de cette loi normale est représentée ci-dessous.
L'égalité $P(X \leq 40) = 0{,}0912$ est illustrée graphiquement.



1. La probabilité qu'un élève consacre quotidiennement plus de 80 minutes à faire ses devoirs scolaires est :

   a) 0,0912 b) 0,8076 c) 0,8 d) 0,9088

2. La probabilité qu'un élève consacre quotidiennement moins d'une heure à faire ses devoirs scolaires est :

   a) 0,5 b) 0,6 c) 1 d) 0,1368

Ex 6 QCM Loi Normale (Tiré de divers sujets de bac)

1. Un laboratoire pharmaceutique fabrique des gélules contenant une substance S. La masse de substance S, exprimée en milligrammes (mg), contenue dans une gélule est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $8,2$ et d'écart type $0,05$.

   La norme de fabrication impose que la masse de substance S dans une gélule soit comprise entre 8,1 mg et 8,3 mg. La probabilité qu'une gélule soit hors norme après la fabrication est :

   a. 0,2 **b.** 0,05 **c.** 0,8 **d.** 0,95

2. La taille T en cm d'un garçon de 10 ans est modélisée par une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $\mu = 135$ et d'écart type $\sigma = 5$.

   a) $p(T < 145) \simeq 0{,}02$ b) $p(125 < T < 145) \simeq 0{,}95$
   c) $p(125 < T < 145) \simeq 0{,}68$ d) $p(T > 125) \simeq 0{,}99$

Ex 7 QCM Loi Normale (Tiré du bac Métropole 2017)

On considère X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type 5.

1) La probabilité $p(50 \leq X \leq 70)$ arrondie à 0,01 est égale à :

   a) 0,60 b) 0,68 c) 0,95 d) 0,99

2) La probabilité $p(X \geq 65)$ arrondie à 0,01 est égale à :

   a) 0,05 b) 0,16 c) 0,50 d) 0,80

Ex 8 QCM Loi Normale (Tiré du bac Métropole 2016)

Un test d'aptitude est évalué sur 100 points. Il faut obtenir au moins 60 points pour le réussir.
Le score d'un candidat est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 66$ et d'écart type σ inconnu.
La probabilité, pour un candidat pris au hasard, d'obtenir un score compris entre 60 et 72 points est égale à 0,95.

1. Parmi les valeurs ci-dessous, la plus proche de σ est :
   a) 3 b) 6 c) 5 d) 9
2. Pour réussir le test, il faut obtenir 60 points ou plus. La probabilité pour un candidat d'échouer à ce test est de :
   a) 0,9 b) 0,1 c) 0,05 d) 0,025

Ex 9 Pot de confiture (Tiré du bac Antilles-Guyane 2016)

Une entreprise familiale fabrique de la confiture de fraises biologiques.
On s'intéresse dans cette partie à la masse des pots de confiture.
On admet que la masse M (en gramme) d'un pot de confiture prélevé au hasard dans le stock est modélisée par une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Donner la valeur de $p(245 \leq M \leq 255)$.
2. En déduire la probabilité qu'un pot de confiture ait une masse comprise entre 250 g et 255 g.

Ex 10 Parc aquatique (Tiré du bac Métropole 2015)

Une des attractions du parc, une descente de type rafting dans des bouées géantes, attire beaucoup de visiteurs.
Les normes de sécurité imposent que le bassin d'arrivée contienne un volume d'eau compris entre 150 et 170 m^3 d'eau. Chaque soir, à la fermeture du parc, l'équipe de maintenance effectue des vérifications et décide, ou non, d'intervenir. Le volume d'eau (exprimé en m^3) contenu dans le bassin, à la fin d'une journée d'exploitation de cette attraction, est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 160$ et d'écart type $\sigma = 5$.

1. a) Calculer $p(150 \leq X \leq 170)$.
   b) En déduire la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée d'intervenir pour respecter les normes de sécurité.
2. Quelle est la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée, pour respecter les normes, de rajouter de l'eau dans le bassin à la fin d'une journée d'ouverture ?

Ex 11 Age du salarié (Tiré du bac Polynésie 2018)

On choisit au hasard un salarié dans une première entreprise. On modélise l'âge du salarié par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 40 et d'écart type 5.

Si besoin, on arrondira les probabilités à 10^{-2} .

1. Calculer la probabilité que le salarié ait entre 35 et 50 ans.

2. Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 45)$.

3. Dans une deuxième entreprise, on choisit un salarié. L'âge du salarié choisi est modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale telle que $P(Y \geq 45) = 0{,}5$ et $P(37 \leq Y \leq 53) \approx 0{,}95$.
Déterminer les valeurs de l'espérance μ et de l'écart type σ de la loi normale suivie par Y.

Ex 12 Batterie pour téléphone (Tiré du bac Polynésie 2018)

Une entreprise fabrique des batteries pour téléphone.
Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis au centième.

On modélise l'autonomie d'une batterie, exprimée en minute, par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 750$ et d'écart type $\sigma = 75$.

1. Donner la valeur, arrondie au centième, de la probabilité $p(600 \leqslant X \leqslant 900)$.
2. Calculer la probabilité qu'une batterie ait une autonomie supérieure à 15 heures.

Ex 13 Centres d'appel téléphonique (Tiré du bac Pondichery Sept. 2017)

On modélise le nombre de personnes contactées en une semaine par ce centre d'appel par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 9000 et d'écart-type 450.

1. Déterminer la probabilité que moins de 9500 personnes soient contactées en une semaine.

2. Déterminer la probabilité $P(8100 < X < 9900)$.

3. L'objectif est de contacter au moins 8750 personnes en une semaine.
A-t-on plus de 3 chances sur 4 d'atteindre cet objectif ?

Ex 14 Comité d'entreprise (Tiré du bac Métropole Sept. 2017)

Le comité d'entreprise a finalement décidé de construire une salle de sport. On désigne par X la variable aléatoire correspondant à la durée hebdomadaire, en minutes, de la fréquentation de la salle de sport par un salarié de l'entreprise.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 20.

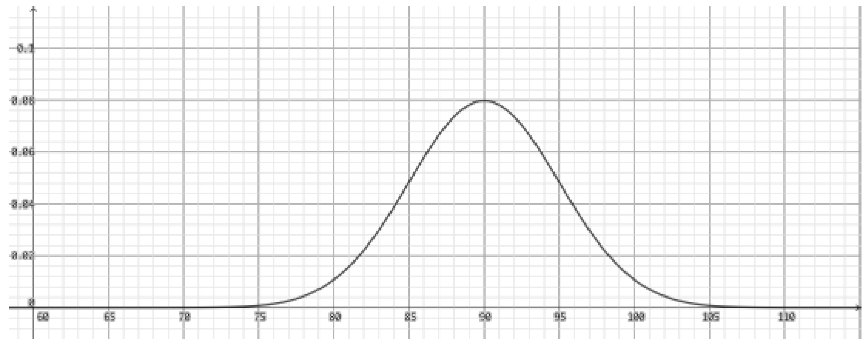
1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'un salarié de l'entreprise pratique entre 60 minutes et 140 minutes de sport par semaine ?
2. Pour rester en bonne santé, il est recommandé de pratiquer au moins 140 minutes de sport par semaine. Quel est le pourcentage, arrondi à 0,1 %, de salariés de l'entreprise qui utilisent suffisamment la salle de sport pour satisfaire à cette recommandation ?

Ex 15 Blanchisserie (Tiré du bac Centres Etrangers 2018)

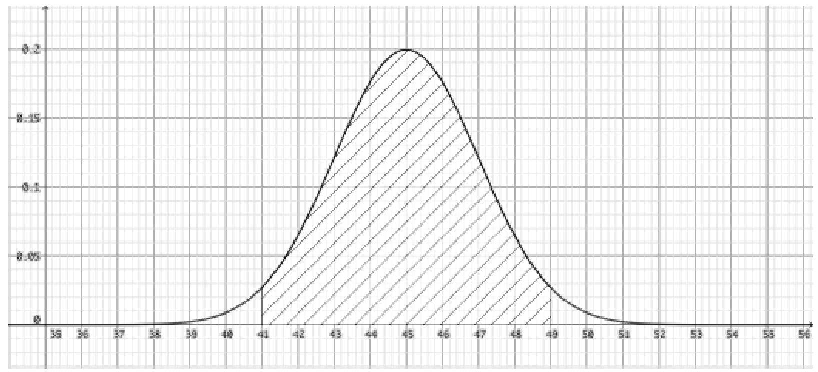
Une entreprise de blanchisserie propose à ses clients d'utiliser sur place ses machines à laver. Conscient des enjeux environnementaux, le gérant s'interroge sur la consommation en eau, par cycle de lavage, de ses machines. Il fait réaliser une étude par une société de conseil spécialisée dans l'accompagnement vers la transition énergétique.

1. Cette étude permet de modéliser la consommation en eau, exprimée en litre, par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 90 et d'écart type 5.
Le graphique figurant **en annexe, à rendre avec la copie**, représente la courbe de densité de la variable aléatoire X.
Hachurer sur ce graphique le domaine correspondant à l'événement $\{X > 80\}$ et donner la valeur de sa probabilité.
2. La société de conseil suggère au gérant de remplacer ses machines par de nouvelles, moins énergivores et mieux éco-conçues. Leur consommation en eau, exprimée en litre, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance 45 et d'écart type 2.
Un graphique en **annexe** représente la courbe de densité de la variable aléatoire Y.
Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'aire du domaine hachuré et donner sa valeur.

Question 1.



Question 2.



Ex 16 Distributeur de tomates (Tiré du bac Antilles Guyane Sept 2015)

Un distributeur de tomates est approvisionné par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de ce distributeur, le reste provenant, à parts égales, des deux autres producteurs.

Avant d'être conditionnées, les tomates sont calibrées par une machine qui les trie selon leur diamètre. Les tomates dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont conservées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées. Il a été constaté que 5 % des tomates fournies par le premier producteur sont hors calibre, 20 % des tomates fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des tomates fournies par le troisième producteur sont hors calibre. Chaque jour les tomates livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.

Un contrôle de qualité sur les tomates est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit au hasard une tomate dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».

On note A_1, A_2, A_3 et C les événements :

– A_1 : « la tomate prélevée provient du premier producteur » ;
– A_2 : « la tomate prélevée provient du deuxième producteur » ;
– A_3 : « la tomate prélevée provient du troisième producteur » ;
– C : « la tomate prélevée est de bon calibre ».

Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ son événement contraire et $p(E)$ sa probabilité.

Pour tout événement E, on note $\bar{E}$ son événement contraire et $p(E)$ sa probabilité.

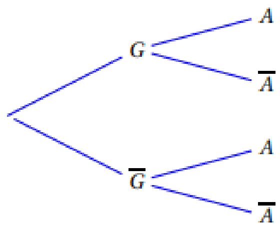
1. En utilisant les données de l'énoncé, compléter l'arbre donné en annexe.
2. Justifier que $p(A_2) = 0{,}15$.
3. Déterminer la probabilité que la tomate prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur.
4. Montrer que la probabilité que la tomate prélevée ait le bon calibre est égale à 0,929.
5. La tomate prélevée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette tomate provient très probablement du deuxième producteur ». A-t-il raison ? Justifier.
6. Le contrôleur prélève au hasard un lot de sept tomates. Le nombre de tomates est suffisamment grand pour assimiler ces prélèvements à des tirages indépendants avec remise.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité, à 0,001 près, qu'il y ait exactement cinq tomates de bon calibre dans le lot.
7. Le diamètre en cm d'une tomate de bon calibre est modélisé par la loi normale d'espérance $\mu = 6$ et d'écart type $\sigma = 0{,}5$.
   On choisit une tomate de bon calibre au hasard.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer à 0,01 près :
   a. la probabilité que la tomate ait un diamètre compris entre 5 cm et 7 cm ;
   b. la probabilité que la tomate ait un diamètre inférieur ou égal à 5,5 cm.

Ex 17 Fête locale (Tiré du bac Antilles Polynésie 2014)

Partie A

Dans un petit village, la mairie a organisé une fête locale : un certain nombre d'entrées gratuites ont été distribuées aux habitants et des stands ont été installés pour la vente de produits locaux.
Les organisateurs estiment que 40 % des visiteurs de la fête ont eu une entrée gratuite, les autres ont payé leur entrée.
De plus, parmi les visiteurs ayant une entrée gratuite, 45 % ont effectué un achat dans un des stands.
Parmi ceux ayant payé leur entrée, 60 % n'ont rien acheté.
On interroge au hasard un des visiteurs de la fête à la fin de la journée.
On note
G l'évènement : « le visiteur a eu une entrée gratuite »,
A l'évènement : « le visiteur a effectué un achat ».
On notera $\overline{G}$ l'évènement contraire de G et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Donner la valeur de la probabilité $P_G(A)$.
2. Recopier et compléter sur votre copie l'arbre de probabilité ci-dessous



3. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : « le visiteur a payé son entrée et a effectué un achat ».
4. Montrer que la probabilité que le visiteur ait effectué un achat est 0,42.
5. Calculer la probabilité que le visiteur ait payé son entrée sachant qu'il a effectué un achat.
   On arrondira à 0,01 près le résultat.

Partie B

1. On rappelle que la probabilité qu'un visiteur ait effectué un achat vaut 0,42.
   On interroge un groupe de 15 visiteurs.
   Dans cette question, on suppose que la réponse d'un visiteur est indépendante de celle des autres visiteurs.
   Calculer alors la probabilité que le nombre de visiteurs ayant effectué un achat soit égal à 10.
2. On estime que le modèle précédent n'est pas satisfaisant.
   On considère désormais que le pourcentage de visiteurs ayant effectué un achat suit une loi normale d'espérance 42 et d'écart-type 4.
   a. Calculer la probabilité d'avoir un pourcentage de ces visiteurs inférieur ou égal à 46.
   b. Calculer la probabilité d'avoir un pourcentage de ces visiteurs compris entre 34 et 50.

Ex 18 Stock de pantalons (Tiré du bac Antilles Guyanne 2014)

Un magasin de vêtements a constitué un stock d'un certain type de pantalons venant de trois fabricants f_1, f_2, et f_3.
Certains de ces pantalons présentent un défaut.
Pour tout évènement E on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $p(E)$ sa probabilité.

Partie A

60 % du stock provient du fabricant f_1, 30 % du stock provient du fabricant f_2, et le reste du stock provient du fabricant f_3.
La qualité de la production n'est pas la même selon les fabricants.
Ainsi :

6 % des pantalons produits par le fabricant f_1 sont défectueux

4 % des pantalons produits par le fabricant f_2 sont défectueux

2 % des pantalons produits par le fabricant f_3 sont défectueux.

On prélève au hasard un pantalon dans le stock. On considère les évènements suivants :

F_1 : « le pantalon a été fabriqué par f_1 » ;

F_2 : « le pantalon a été fabriqué par f_2 » ;

F_3 : « le pantalon a été fabriqué par f_3 » ;

D : « le pantalon est défectueux ».

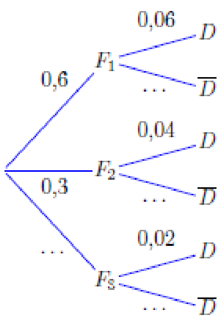
1) Calculer la probabilité de l'évènement F_3.

2) **a)** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement D est égale à $0,05$.

c) En déduire la probabilité de l'évènement : « le pantalon est sans défaut ».

3) On prélève un pantalon parmi ceux qui présentent un défaut.
Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par le fabricant f_1 ?



Partie B

Dans toute cette partie, on admet que le pourcentage de pantalons du stock présentant un défaut est égal à 5 %.
On choisit au hasard un lot de 3 pantalons dans le stock. On suppose que le stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à 3 tirages indépendants avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui dénombre les pantalons présentant un défaut dans le lot de 3 pantalons prélevés.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
Préciser ses paramètres.

2) Quelle est la probabilité, arrondie au millième, que le lot prélevé comporte exactement un pantalon défectueux ? On pourra s'aider d'un arbre de probabilités faisant intervenir les évènements D et $\overline{D}$.

3) Quelle est la probabilité, arrondie au millième, que le lot prélevé comporte au moins un pantalon défectueux ?

Partie C : étude de la production d'un fabricant

On s'intéresse dans cette partie à la production du fabricant f_2.
On s'intéresse uniquement au défaut de longueur et on considère qu'il y a un défaut sur un pantalon lorsque sa longueur est inférieure à 79 cm ou supérieure à 81 cm.
La longueur d'un pantalon, en centimètres, est modélisée par une variable aléatoire L. On admet que L suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart type $0,5$.
On donne de plus : $p(L \leqslant 81) = 0,977$.

1) Calculer la probabilité $p(79 \leqslant L \leqslant 81)$.

2) Ce résultat confirme-t-il les données de la partie A ?