

Chapitre G1 : Nombres complexes

1 – Forme algébrique d'un nombre complexe

a. Définitions, Représentation graphique

L'ensemble des nombres complexes est une extension de l'ensemble des nombres réels :

Définition 1 : L'ensemble \mathbb{C} des **nombre complexes** possède les caractéristiques suivantes :

- Il contient le **nombre imaginaire** i qui vérifie $i^2 = -1$.
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme (dite **algébrique**) $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
- a est la **partie réelle** de z notée $a = \text{Re}(z)$ et b est la **partie imaginaire** de z notée $b = \text{Im}(z)$

Remarque :

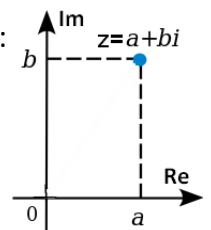
- $i \notin \mathbb{R}$: Dans l'ensemble des nombres réels, un carré est toujours positif.
- On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: Un nombre réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.
- Lorsque $\text{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **nombre imaginaire pur**.
- Deux nombres complexes sont **égaux** s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Exemple 1 : Voici trois exemples de nombres complexes

- $z = 3 - i$. On a $\text{Re}(z) = 3$ et $\text{Im}(z) = -1$
- $z' = -2i$. On a $\text{Re}(z') = 0$ et $\text{Im}(z') = -2$. C'est un nombre imaginaire pur
- $z'' = 2$. On a $\text{Re}(z'') = 2$ et $\text{Im}(z'') = 0$. C'est un nombre réel

Représentation graphique : Le **plan complexe** est un plan muni d'un repère orthonormé, où l'axe des abscisses est appelée **l'axe des réels** et l'axe des ordonnées est appelée **l'axe des imaginaires** :

- Chaque nombre complexe $z = a + ib$ est représenté par le point de coordonnées $M(a; b)$.
- M est appelé **l'image** du nombre z et noté $M(z)$.
- z est appelé **l'affixe** du point M et noté z_M .



Exemple 2 : Dans le plan complexe ci-dessous.

1) Lire les affixes des points A, B, C et D .

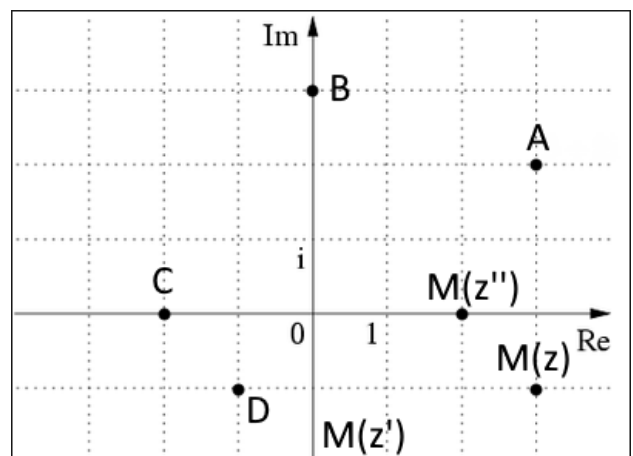
$$z_A = 3 + 2i$$

$$z_B = 3i$$

$$z_C = -2$$

$$z_D = -1 - i$$

2) Placer les points $M(z), M(z')$ et $M(z'')$ images des nombres complexes z, z' et z'' de l'exemple 1.



b. Opérations sur les nombres complexes

On définit sur l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} une **addition** et une **multiplication** qui possède les mêmes propriétés que celles de \mathbb{R} . En pratique, les calculs avec les nombres complexes fonctionnent de la même manière qu'avec des nombres réels avec une règle de calcul supplémentaire : On remplace i^2 par -1 .

Exemple 3 : On considère les nombres complexes $z_1 = 2 - 5i$ et $z_2 = 3 + 9i$.

Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

- **Addition** : $z_1 + z_2 = (2 - 5i) + (3 + 9i) = 2 + 3 - 5i + 9i = 5 + 4i$
- **Soustraction** : $z_1 - z_2 = (2 - 5i) - (3 + 9i) = 2 - 3 - 5i - 9i = -1 - 14i$
- **Multiplication** : $z_1 \times z_2 = (2 - 5i)(3 + 9i) = 6 + 18i - 15i - 45i^2 = 6 + 3i + 45 = 51 + 3i$
- **Division** : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-5i}{3+9i} = \frac{(2-5i)(3-9i)}{(3+9i)(3-9i)} = \frac{6-18i-15i+45i^2}{3^2-(9i)^2} = \frac{6-33i-45}{9+81} = \frac{-39-33i}{90} = -\frac{39}{90} - \frac{33i}{90} = -\frac{13}{30} - \frac{11}{30}i$

Méthode : Pour calculer le quotient de deux nombres complexes, on multiplie le dénominateur par la quantité conjugué (voir ci-dessous) afin d'éliminer le i au dénominateur. On peut alors utiliser l'identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Remarque : De même que dans \mathbb{R} , la division par « 0 » est une opération interdite dans \mathbb{C}

Exemple 4 : Calculer les puissances successives du nombre imaginaire i :

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \times i = -i$
- $i^4 = i^2 \times i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 \times i = i$
- $i^6 = -1$
- $i^7 = -i$
- $i^8 = 1$

On trouve périodiquement $i, -1, -i, 1$, etc.

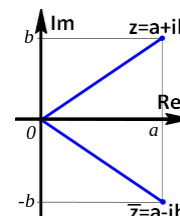
c. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z , et on note \bar{z} , le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$

Exemple 5 : • $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$; • $\overline{-1 - i} = -1 + i$; • $\overline{3i} = -3i$; • $\overline{-2} = -2$

Remarque :

- Les points d'affixes z et \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Un nombre complexe est réel si et seulement si $z = \bar{z}$
- Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$



Propriété 1 : Pour tous nombres complexes z et z' , on a les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ (avec n entier naturel non nul)
- Si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$

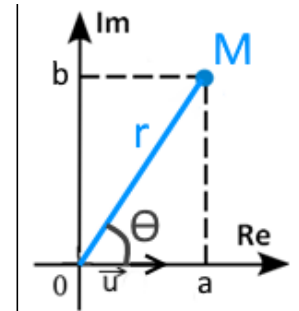
Exemple 6 : Si $z = 2 - 5i$ alors $z\bar{z} = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$



2 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe

La forme algébrique permet de repérer un nombre complexe $z = a + ib$ par un système de coordonnées cartésienne (a, b) . L'image M du nombre complexe z peut être également repéré d'une autre manière par :

- La distance r entre le point M et l'origine O du repère.
- L'angle θ formé par l'axe des abscisses et la droite (OM) .



Définition 3 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M son image.

- On appelle **module** de z , et on note $|z|$, la distance $r = OM$.
- On appelle **argument** de z , et on note $\arg(z)$, l'angle orienté $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

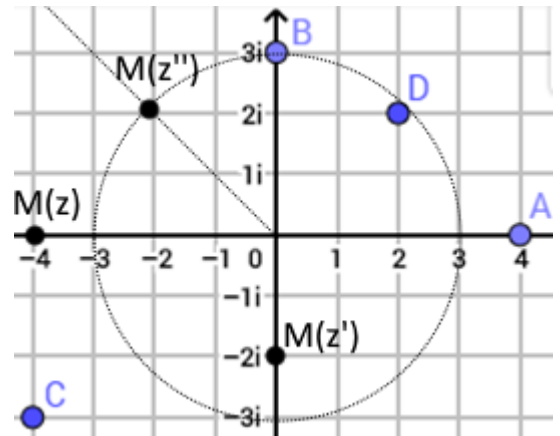
Exemple 7 : Dans le plan complexe, on a représenté l'image de quelques nombres complexes.

1) A l'aide du graphique ci-contre déterminer :

- $|4| = 4$
- $|3i| = 3$
- $|-4 - 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
- $\arg(4) = 0$
- $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$
- $\arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}$

2) Représenter les nombres complexes tel que :

- $|z| = 4$
- $|z| = 2$
- $|z| = 3$
- $\arg(z) = \pi$
- $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$
- $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$



Remarque : Pour tout nombre complexe z , on a $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M son image dans le plan complexe. Plaçons le point $A(a, 0)$.

Le triangle OAM est donc rectangle en A et on a $OA = |a|$ et $AM = |b|$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $OM^2 = OA^2 + AM^2 = a^2 + b^2$ et donc $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

De plus, à l'aide des formules de trigonométrie on obtient :

$$\bullet \cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OA}{OM} = \frac{a}{r} \qquad \bullet \sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AM}{OM} = \frac{b}{r}$$

Ainsi on obtient $a = r \times \cos(\theta)$ et $b = r \times \sin(\theta)$. En remplaçant dans la forme algébrique, z s'écrit :

$$z = a + ib = r \cos(\theta) + i r \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Propriété 2 : Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut s'écrire la forme (dite **trigonométrique**) suivante :

$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. De plus on a les formules suivantes :

$$\bullet r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \bullet \cos(\theta) = \frac{a}{r} \qquad \bullet \sin(\theta) = \frac{b}{r}$$

Exemple 8 : Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$

$$r = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2 ; \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{2} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6}. \text{ On a donc } z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$$

Exemple 9 : Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = 4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))$

$$a = r \cos(\theta) = 4 \cos(\frac{\pi}{3}) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ et } b = r \sin(\theta) = 4 \sin(\frac{\pi}{3}) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \text{ Ainsi, } z = 2 + i2\sqrt{3}.$$



3 – Forme exponentielle d'un nombre complexe

La forme exponentielle est une notation d'un nombre complexe qui permet de simplifier les calculs.

On pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

Propriété 3 : Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut s'écrire la forme (dite **exponentielle**) suivante :

$$z = re^{i\theta} \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)$$

Exemple 8 : Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $z = 1 + i$

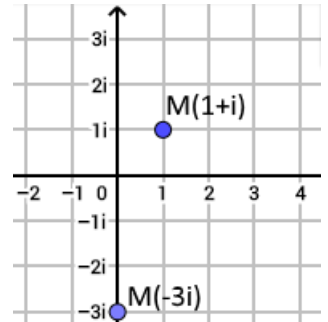
$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{On a donc } z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Exemple 9 : Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

$$r = 3 \text{ et } \theta = -\frac{\pi}{2}. a = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } b = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times (-1) = -3$$

$$\text{On a donc } z = -3i.$$



Valeurs à connaître :

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Propriété 4 (admise) : Pour tous nombres réels θ et θ' , on a les égalités suivantes :

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Exemple 10 : On considère z_1 le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ et z_2 le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{4}$.

1) Ecrire la forme exponentielle de z_1 et z_2 .

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2) Calculer \bar{z}_1 puis déterminer son module et son argument.

$$\bar{z}_1 = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2 \times \overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } |\bar{z}_1| = |z_1| = 2 \text{ et } \arg(\bar{z}_1) = -\arg(z_1) = -\frac{\pi}{3}$$

3) Calculer $\frac{1}{z_2}$ puis déterminer son module et son argument.

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ donc } \left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|} = \frac{1}{3} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$$

4) Calculer $z_1 \times z_2$ puis déterminer son module et son argument.

$$z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = (2 \times 3) \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 6e^{i\left(\frac{4\pi-3\pi}{12}\right)} = 6e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Donc } |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2 \times 3 = 6 \text{ et } \arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

5) Calculer $\frac{z_1}{z_2}$ puis déterminer son module et son argument.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{3} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{3} \times e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3} \times e^{i\left(\frac{4\pi+3\pi}{12}\right)} = \frac{2}{3} \times e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\text{Donc } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{3} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

4 – Utilisation des nombres complexes en géométrie

Propriété 5 :

- Tout vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ peut être associé à un nombre complexe $z_{\vec{v}} = a + ib$ appelé affixe du vecteur \vec{v} .
- L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est donné par le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- Le module de l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} correspond à la distance $AB : AB = |z_B - z_A|$.
- L'argument de l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} correspond à l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) : (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.

Exemple 11 : On considère les nombres complexes $z_A = 2 + i$ et $z_B = 4 + 3i$

1) a. Calculer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 + 3i - (2 + i) = (4 - 2) + (3i - i) = 2 + 2i.$$

b. Calculer la distance AB

$$AB = |z_B - z_A| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

c. Calculer l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(2 + 2i) = \theta$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4}$$

2) On considère le point C d'affixe $z_C = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

a. Calculer la distance AC

$$z_C = 3i \text{ donc } AC = |3i - (2 + i)| = |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

b. Déterminer l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

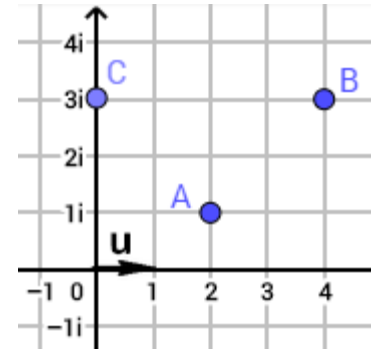
$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$$

$$\text{Or } (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = \arg(-2 + 2i) = \theta \text{ et } \cos(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

c. En déduire la nature du triangle ABC

On a $AB = AC$ et $\hat{A} = 90^\circ$ donc le triangle ABC est rectangle en A



Propriété 6 : On considère A et B deux points du plan. I est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

Exemple 12 : Soient les nombres complexes $z_A = -2 + 3i$; $z_B = 4 + i$; $z_C = 3 + 4i$ et $z_D = -1$

1) a. Calculer l'affixe du milieu I de $[AB]$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 + 3i + 4 + i}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

b. Vérifier que I est le milieu de $[CD]$

$$\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3 + 4i + (-1)}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i = z_I \text{ donc } I \text{ milieu de } [CD]$$

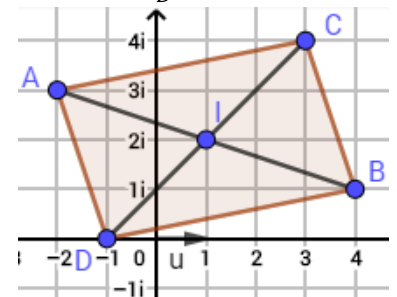
c. En déduire la nature du quadrilatère $ACBD$

C'est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

2) Montrer d'une autre manière que $ACBD$ est un parallélogramme.

$$z_{\overrightarrow{AC}} = (3 + 4i) - (-2 + 3i) = 5 + i \text{ et } z_{\overrightarrow{DB}} = -1 - (4 + i) = 5 + i$$

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ et $ACBD$ est un parallélogramme.



Nombres complexes – Fiche d'exercices

Ex 1 On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

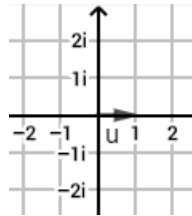
Calculer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$

Ex 2 Soient les nombres complexes $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 - 2i$ et $z_3 = -5 + 2i$

Calculer la forme algébrique de $z_1 z_2$; $z_2 z_3$; $\frac{z_1}{z_2+z_3}$; $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$; $\frac{z_1}{z_2 z_3}$

Ex 3 On considère le nombre complexe $z = 2 - 2i$

- 1) Déterminer la forme algébrique de \bar{z}
- 2) Placer les points $M(z)$ et $M(z')$
- 3) Calculer mentalement $z\bar{z}$.
- 4) Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$; $\frac{1}{\bar{z}}$; z^2 ; z^4 ; \bar{z}^4



Ex 4 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- 1) $(2 + i)z - 3 = 1 + i$
- 2) $3 + 5iz = 8 + 2i$
- 3) $(4i + 2z)i = 2 - 5i$

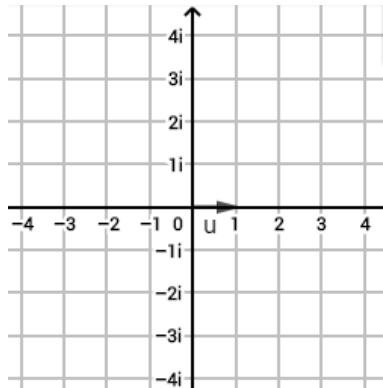
Ex 5 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

- | | | |
|------------------------|------------------|------------------------|
| a. $z = 1 + i$ | b. $z = -2i$ | c. $z = -5$ |
| d. $z = -\sqrt{3} - i$ | e. $z = -2 + 2i$ | f. $z = -1 + \sqrt{3}$ |

Ex 6 On considère les nombres complexes suivants :

- z_A de module 3 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$
- z_B de module 4 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$
- z_C de module 2 et d'argument π
- z_D de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$
- z_E de module 3 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
- z_F conjugué de z_E

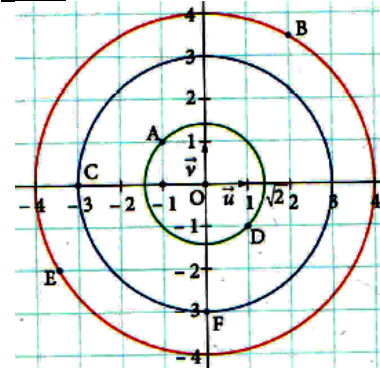
- 1) Dans le plan complexe, placer les points A, B, C, D, E images des nombres complexes précédents.
- 2) Déterminer leurs formes algébriques.



Ex 7 Compléter le tableau suivant :

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$-4i$		$\frac{e^{-i\pi}}{2}$
	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	
$3 - i\sqrt{3}$		$3e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Ex 8 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.



- 1) Lire sur le graphique les affixes des points A, B, C, D, E et F sous la forme exponentielle.
- 2) Exprimer les affixes de ces points sous la forme algébrique.
- 3) Ecrire sous forme exponentielle puis placer sur le graphique les nombres complexes suivants :

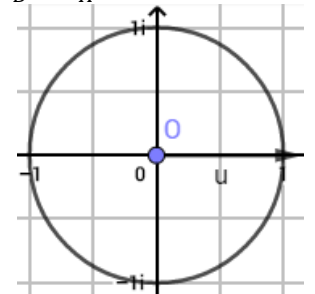
a. $z_G = \overline{z_E}$	b. $z_H = z_A^2$
c. $z_K = z_D^4$	d. $z_L = z_A \times z_D$

Ex 9 On considère les nombres complexes $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 5e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_3 = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$
Ecrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme exponentielle.

- | | | |
|--------------|-------------------------|--------------------------|
| a. $z_1 z_2$ | b. $\frac{z_2}{z_3}$ | c. z_1^2 |
| d. z_3^4 | e. $\overline{z_2} z_3$ | f. $\frac{z_2 z_3}{z_1}$ |

Ex 10 On considère les nombres complexes $z_A = -i$ et $z_B = z_A e^{i\frac{\pi}{2}}$

- 1) a. Déterminer la forme exponentielle de z_A et z_B .
b. Déterminer la forme algébrique de z_B .
- 2) Placer leurs images A et B dans le plan complexe.
- 3) Démontrer que le triangle OAB est équilatéral
- 4) Déterminer l'affixe z_C du point C tel que $OBAC$ soit un losange



Ex 11 QCM 1 (Tiré des sujets de Bac Antilles-Guyane 2017-2018)

1. Si $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors le quotient $\frac{z_1}{(z_2)^2}$ vaut :
- a. -2 b. $-\sqrt{3} + i$ c. 2 d. $-\sqrt{3} - i$
2. Si $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors le produit $\bar{z}_1 \times z_2$ vaut :
- a. -2 b. $1 - i\sqrt{3}$ c. $e^{i\pi}$ d. $-1 - i\sqrt{3}$
3. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{3} - 5i$.
Le nombre complexe $z\bar{z}$ est égal à :

A. $3 - 25i$	B. $(-\sqrt{3} + 5i)(\sqrt{3} - 5i)$
C. -28	D. 28

4. Le nombre a est un réel strictement positif.
Le nombre complexe $z = a + i a\sqrt{3}$ admet pour forme exponentielle :

A. $e^{i\frac{a\pi}{3}}$	B. $ae^{i\frac{2a\pi}{3}}$
C. $2 a e^{i\frac{\pi}{3}}$	D. $2 a e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Ex 12 QCM 2 (Tiré du bac Métropole 2015)

1. On considère le nombre complexe $3e^{-i\frac{\pi}{6}}$. La forme algébrique du nombre complexe z est :
- a. $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
b. $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
c. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
d. $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
2. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$. La forme exponentielle du nombre complexe $z_1 \times z_2$ est :
- a. $4e^{i\frac{\pi}{6}}$
b. $-4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
c. $2e^{i\frac{\pi}{6}}$
d. $4e^{i\frac{\pi}{2}}$

Ex 13 QCM 3 (Tiré des sujets de divers sujets de bac)

1. Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point A de coordonnées $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$.
Une écriture exponentielle de l'affixe du point A est :
- a. $8e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
b. $8e^{i\frac{3\pi}{4}}$
c. $4\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
d. $4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
2. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -3 + i3\sqrt{3}$ est :
- a. $3e^{i\frac{2\pi}{3}}$
b. $6e^{i\frac{2\pi}{3}}$
c. $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
d. $-6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
3. On considère le complexe $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
Le nombre complexe z^2 est égal à :
- a. $z^2 = 2$
b. $z^2 = 4$
c. $z^2 = -4$
d. $z^2 = -4i$

Ex 14 QCM 4 (Tiré des sujets de divers sujets de bac)

1. On considère le nombre complexe $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$. Le nombre complexe conjugué de z est égal à :
- a. $\bar{z} = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$ b. $\bar{z} = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ c. $\bar{z} = -3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d. $\bar{z} = 33e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
2. Soient Z_1 et Z_2 les nombres complexes définis par : $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Une forme exponentielle du quotient $\frac{Z_1}{Z_2}$ est :
- a. $\frac{2}{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
b. $-e^{-i\frac{\pi}{6}}$
c. $-\frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$
d. $\frac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Ex 15 Nombres complexes (Tiré du Bac Antilles-Guyane 2013)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$(2-i)z = 2-6i.$$

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E). On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.
- Déterminer la forme exponentielle de z_1 .
- Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times z_1$.
Déterminer les formes exponentielle et algébrique de z_2 .

2. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2-2i$, $z_B = -2-2i$ et $z_C = -4i$.

- Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
- Déterminer la nature du triangle ABC.

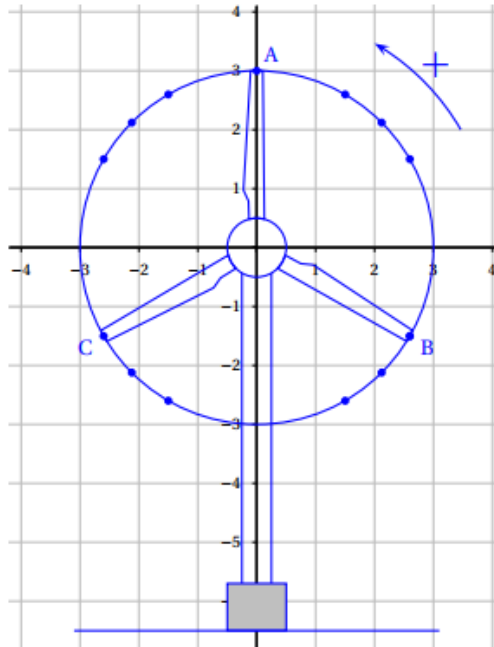
Ex 16 Eolienne (Tiré du Bac Métropole Septembre 2017)

Dans le plan complexe muni d'une repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on représente les extrémités des pales d'une éolienne par le point A de coordonnées $(0; 3)$ et par les points B et C d'affixes respectives :

$$z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \text{ et } z_C = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

- Soit z_A l'affixe du point A.
 - Donner la forme algébrique de z_A .
 - Donner la forme exponentielle de z_A .
- Déterminer la forme exponentielle de z_B .
- On admet que lorsque l'hélice tourne d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians dans le sens direct, les points A, B et C sont transformés respectivement en A' , B' et C' tels que :
 - A' a pour affixe $z_{A'} = z_A \times e^{i\frac{\pi}{2}}$
 - B' a pour affixe $z_{B'} = z_B \times e^{i\frac{\pi}{2}}$
 - C' a pour affixe $z_{C'} = z_C \times e^{i\frac{\pi}{2}}$

Déterminer la forme exponentielle de $z_{C'}$;

**Ex 17** Quatre Affirmations (Tiré du Bac Polynésie 2018)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives z_A , z_B et z_C :

$$z_A = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{i} \quad z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad z_C = -2ie^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- Affirmation 1** : La forme algébrique de z_A est $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
- Affirmation 2** : Un argument de z_C est $\frac{\pi}{6}$.
- Affirmation 3** : Les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O.
- Affirmation 4** : O est le milieu du segment [BC].

Ex 18 Deux propositions (Tiré du Bac Métropole 2017)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- Proposition 1** : Le nombre complexe z de module $4\sqrt{3}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique $-2\sqrt{3} + 6i$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = z_A \times z_B$.
Proposition 2 : Le point C appartient au cercle de centre O et de rayon 4.