

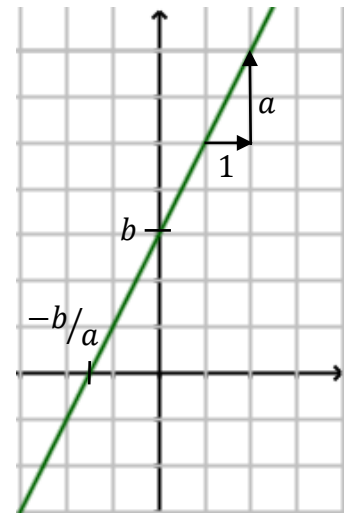
Chap F2 : Polynômes du second degré

0 – Rappel : Polynômes du premier degré (Fonctions affines)

Rappel :

- On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f(x) = ax + b$.
- Sa représentation graphique est une **droite** d'équation $y = ax + b$
- a est appelé le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**
- Si $a > 0$ alors f est **croissante**. Si $a < 0$ alors f est **décroissante**.
- Le **signe** d'une fonction affine est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$



Exemple 1 : Etudier les deux fonctions affines suivantes :

• $f(x) = 2x - 1$

. Coefficient directeur :

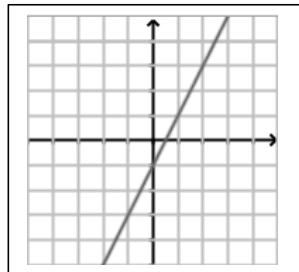
$$a = 2$$

. Ordonnée à l'origine :

$$b = -1$$

. Sens de variation : f est croissante (car $a > 0$)

. Signe : D'abord **néгатif** puis **positif** (car \nearrow)



x	$-\infty$	0.5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = 0.5$$

• $g(x) = -3x + 3$

. Coefficient directeur :

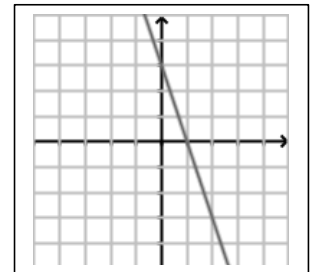
$$a = -3$$

. Ordonnée à l'origine :

$$b = 3$$

. Sens de variation : g est décroissante (car $a < 0$)

. Signe : D'abord **positif** puis **néгатif** (car \searrow)



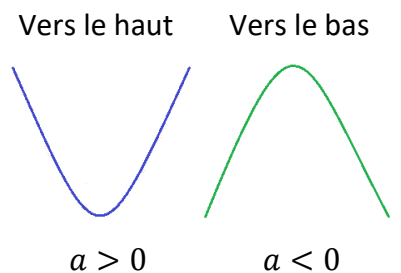
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

$$-\frac{b}{a} = -\frac{3}{-3} = 1$$

1 – Généralités sur les polynômes du second degré

Définition 1 : Soient a, b et c trois nombres réels.

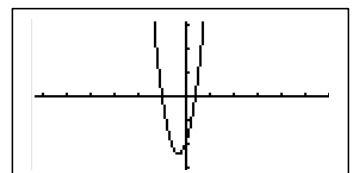
- On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur \mathbb{R} de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
- Sa courbe représentative est appelée une **parabole**.
Si $a > 0$ elle est orientée vers le **haut**. Si $a < 0$ elle est orientée vers le **bas**.



Exemple 2 : La fonction $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ est un polynôme du second degré.

. Ses coefficients sont : $a = 5$; $b = 3$ et $c = -2$

. Sa courbe représentative est une parabole orientée vers le haut (car $a > 0$)



2 – Sens de variation & Extremums d'un polynôme du second degré

Définition 2 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du **second degré**. On appelle **fonction dérivée** de f , la fonction $f'(x) = 2ax + b$.

Exemple 3 : On considère le polynôme du second degré $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$. Calculons la dérivée f' de f .
 $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ donc $f'(x) = 2 \times 5x + 3$ donc $f'(x) = 10x + 3$.

Théorème 1 (Rappel) : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et I un intervalle. Alors :

- Si pour tout x de I , $f'(x) > 0$ alors f est **croissante** sur I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) < 0$ alors f est **décroissante** sur I .

Remarque : Ce théorème permet d'obtenir le **tableau de variation** d'un polynôme du second degré puis de déterminer ses **extremums**

Exemple 4 : Déterminer le tableau de variation des polynômes du second degré suivant :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

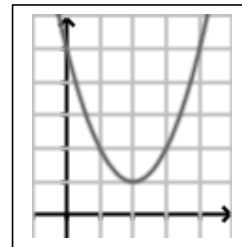
On commence par calculer la dérivée f' : $f'(x) = 2x - 4$

La dérivée est une fonction affine dont le coefficient directeur est égal à 2 donc positif.

La fonction f' est donc croissante donc d'abord négative puis positive.

Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$. On calcule $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$			



La fonction f admet un **minimum** en 2 qui vaut 1.

2) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

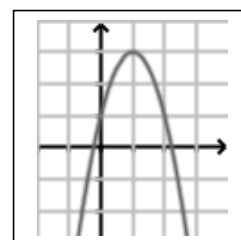
On commence par calculer la dérivée f' : $f'(x) = 2 \times (-2)x + 4 = -4x + 4$

La dérivée est une fonction affine dont le coefficient directeur est égal à -4 donc négatif.

La fonction f' est donc décroissante donc d'abord positive puis négative.

Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. On calcule $f(2) = -2 \times 2^2 + 4 \times (2) + 1 = -8 + 8 + 1 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$			



La fonction f admet un **maximum** en 1 qui vaut 3.



3 – Equation du second degré

Définition 3 : On appelle **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ le réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple 5 : Calculer le discriminant des équations suivantes :

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$a = 1 ; b = -3 ; c = 2$. On a donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

2) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 2 ; b = -4 ; c = 2$. On a donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$

3) $-3x^2 + x - 2 = 0$

$a = -3 ; b = 1 ; c = -2$. On a donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 1 - 24 = -23$

Activité : A l'aide du logiciel Geogebra, créer trois curseurs « nombres » a, b et c , variant entre -5 et 5 , par pas de $0,1$. En utilisant le champ de saisie, tracer la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ puis définir le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$. A l'aide des curseurs faire varier a, b et c puis compléter le tableau suivant :

Effet sur la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$	Signe de Δ
La courbe intersecte 2 fois l'axe des abscisses	
La courbe intersecte 1 fois l'axe des abscisses	
La courbe intersecte 0 fois l'axe des abscisses	

Propriété 1 : On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation possède **deux** solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation possède **une** solution unique : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation possède **aucune** solution.

Remarque : On dit que x_0, x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exemple 6 : Résoudre les équations du second degré suivantes

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1 > 0$ donc l'équation admet 2 solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$. $S = \{1; 2\}$

2) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

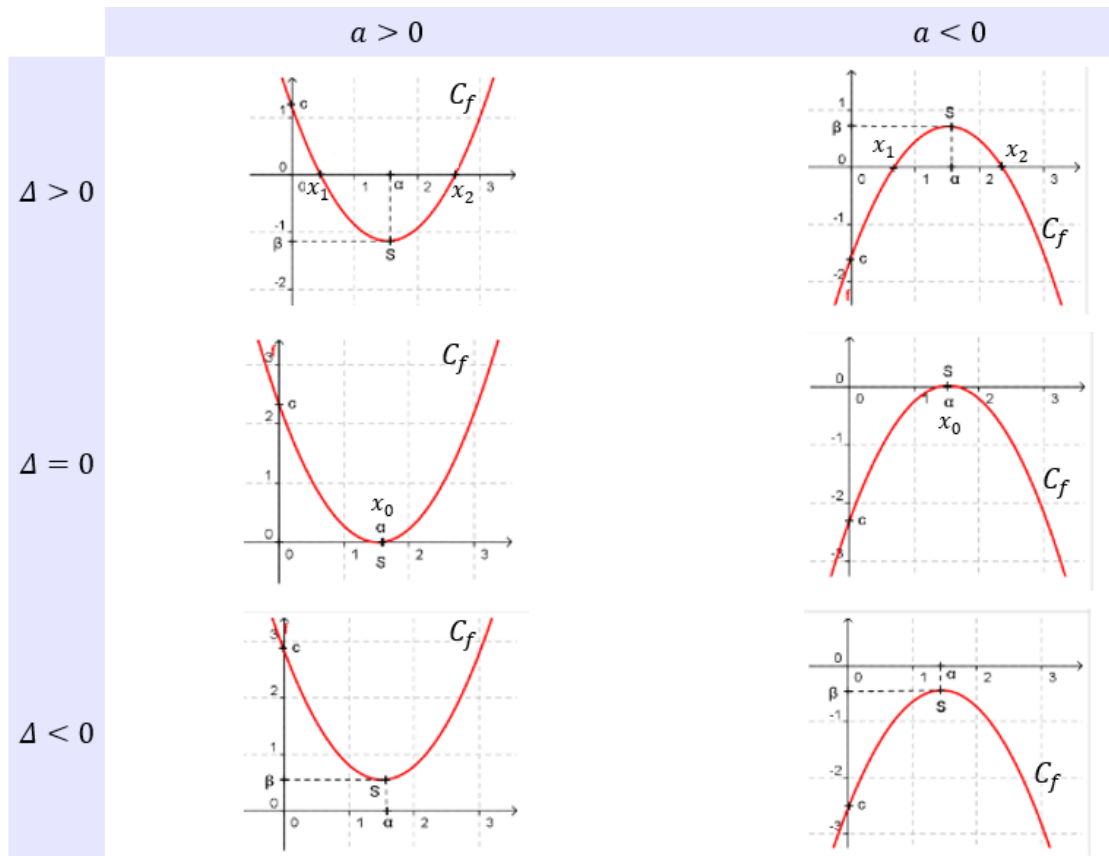
$\Delta = 0$ donc l'équation admet 1 solution unique : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = -(-1) = 1$ $S = \{1\}$

3) $-3x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet aucune solution. $S = \emptyset$



4 – Signe d'un polynôme du second degré



Propriété 2 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré alors f est du signe de a sauf entre ses racines éventuelles.

Exemple 7 : Réaliser le tableau de signe des polynômes suivants :

• $f(x) = x^2 - 3x + 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

• $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$g(x)$		+	0	+

• $h(x) = -3x^2 + x - 2$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		-

Exemple 8 : A l'aide des tableaux de signes, résoudre les inéquations suivantes

• $f(x) \leq 0$ $S = [1; 2]$

• $g(x) > 0$ $S =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

• $h(x) \geq 0$ $S = \emptyset$



Polynômes du Second degré – Fiche d'exercices

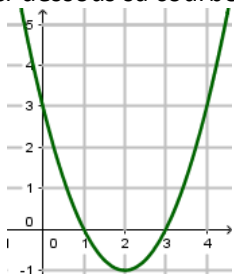
Ex 1 Réaliser le tableau de signe des fonctions affines suivantes :

- a. $f(x) = 3x + 2$ c. $f(x) = -3x + 7$
 b. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ d. $f(x) = -x + 2$

Ex 2 Dériver les fonctions suivantes.

- a. $f(x) = x^2 + 3x + 7$ d. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9$
 b. $f(x) = 3x^2 - x - 5$ e. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$
 c. $f(x) = -2x + 7x + 10$

Ex 3 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4x + 3$. On a tracé ci-dessous sa courbe représentative.



- Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f .
- Calculer la dérivée f' de f .
- Retrouver par le calcul le tableau de variation de la fonction f .

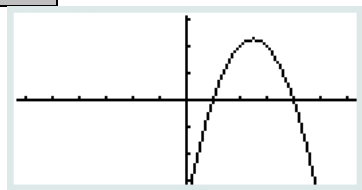
Ex 4 A l'aide de la dérivée f' de f , déterminer le tableau de variation de la fonction f , puis tracer dans un repère l'allure de la courbe f .

- a. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ c. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$
 b. $g(x) = -3x^2 - 6x + 2$ d. $k(x) = 2x^2 + x + 1$

Ex 5 Résoudre les équations suivantes :

- a. $x^2 - 2x - 15 = 0$ e. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$
 b. $3x^2 - 7x + 9 = 0$ f. $4 - 3x^2 + 5x = 0$
 c. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ g. $5x^2 - x + 10 = 1$
 d. $-2x^2 - x + 1 = 0$ h. $-2x^2 = 5x + 3$

Ex 6 On a tracé sur la calculatrice la courbe de la fonction $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.



- Conjecturer graphiquement le tableau de signe de la fonction f .
- Vérifier le résultat par le calcul.
- En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$

Ex 7 Réaliser le tableau de signe des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = x^2 + 2x - 24$ c. $h(x) = -2(x + 3)(x - 4)$
 b. $g(x) = -x^2 - x - 6$ d. $k(x) = 9x^2 + 6x + 1$

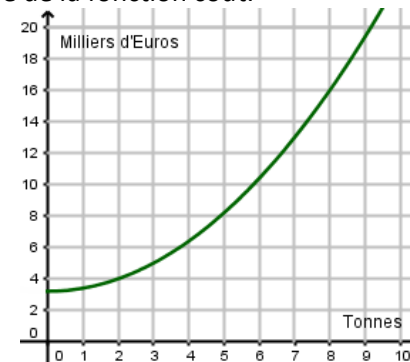
Ex 8 Effectuer une étude complète (tableau de variation, tableau de signe, courbe) de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.

Ex 9 Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production journalière est limitée à 9 tonnes. On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros de x tonnes de ce produit avec $0 \leq x \leq 9$. On note $R(x)$ la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit. Ce produit est vendu 2000 euros la tonne. On a donc $R(x) = 2x$.

Partie A : Lecture graphique

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction coût.

- Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
 - Quel est le coût de fabrication pour une production journalière de 3 tonnes ?
 - Pour quelle quantité d'objets, le coût de production n'excède pas 16000€ ?
- Sur le graphique ci-contre
 - Tracer la fonction R
 - Déterminer graphiquement la quantité d'objets qu'il faut produire pour que l'entreprise soit bénéficiaire.



Partie B : Etude algébrique

Dans cette partie, on admet que la fonction coût est donnée par la formule

$$C(x) = 0,2x^2 + 3,2.$$

- Déterminer les coûts fixes.
- Montrer que le bénéfice est donné par la formule $B(x) = -0,2x^2 + 2x - 3,2$
- Calculer la dérivée B' de B .
- Réaliser le tableau variation de la fonction B .
- En déduire le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser ainsi que la production journalière correspondante.

Ex 10 Parc d'attraction (Tiré du bac Métropole 2014)

Un parc d'attractions est ouvert au public de 9 h à 21 h.

La courbe C donnée ci-dessous représente l'évolution du nombre de visiteurs attendus durant une journée.



1. a) Recopier le tableau suivant et le compléter avec la précision permise par le graphique ci-dessus.

Heure de la journée	11 h	12 h
Nombre de visiteurs attendus		

- b) Quel est le taux d'évolution, en pourcentage arrondi à 0,1 %, du nombre de visiteurs attendus entre 11 heures et 12 heures ?
2. Lorsque le nombre de visiteurs est supérieur ou égal à 300, un fond musical est diffusé par les haut-parleurs du parc.
Un touriste aimerait faire la visite en profitant du fond musical.
Quels horaires peut-on conseiller à ce touriste pour se rendre au parc d'attractions ?
3. La courbe C ci-dessus est la représentation graphique sur l'intervalle $[9 ; 21]$ de la fonction f définie par $f(x) = -8x^2 + 232x - 1282$.
- Déterminer les nombres de visiteurs attendus à 11 h et à 12 h.
Comment peut-on expliquer les éventuels écarts avec les résultats de la question 1. a) ?
 - Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f .
 - En déduire, par le calcul, l'heure à laquelle le nombre de visiteurs attendus est maximal, et donner la valeur de ce maximum.

Ex 11 Recette, Coût, Bénéfice (Tiré du bac Antilles-Guyanne 2015)

Une entreprise fabrique un modèle de meuble en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.

Pour x meubles fabriqués et vendus, le coût de production journalier (exprimé en euros), noté $C(x)$, est donné par :

$$C(x) = 2,25x^2 - 6x + 20$$

Chaque meuble est vendu 299 €.

L'entreprise est ouverte cinq jours par semaine.

Le chef d'entreprise a réalisé la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	x	Recette	Coût	Bénéfice
2	0	0	20	-20
3	10	2990	185	2805
4	20			
5	30			
6	40			
7	50			
8	60			
9	70			
10	80			
11	90			
12	100			

- Donner une formule qui, saisie dans la cellule B2, permet d'obtenir par recopie vers le bas, la recette en fonction du nombre de meubles fabriqués et vendus chaque jour.
 - Donner une formule qui, saisie dans la cellule C2, permet d'obtenir, par recopie vers le bas, le coût en fonction du nombre de meubles fabriqués et vendus chaque jour.
 - Calculer les valeurs associées aux cellules B7, C7 et D7.
- Montrer que le bénéfice journalier correspondant à la production et la vente de x meubles ($x \in [0 ; 100]$) est donné par $B(x) = -2,25x^2 + 305x - 20$.
- Calculer $B'(x)$ et donner le tableau de variations de B sur $[0 ; 100]$.
- Combien de meubles faut-il produire et vendre pour réaliser un bénéfice journalier maximal ?
Déterminer le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise sur une période de quatre semaines.

Ex 12 Trajectoire d'un ballon (Tiré du bac Pondichery 2015)

On s'intéresse à la trajectoire d'un ballon de basketball lancé par un joueur faisant face au panneau. Cette trajectoire est modélisée dans le repère de l'annexe à rendre avec la copie. Dans ce repère, l'axe des abscisses correspond à la droite passant par les pieds du joueur et la base du panneau, l'unité sur les deux axes est le mètre. On suppose que la position initiale du ballon se trouve au point J et que la position du panier se trouve au point P.

La trajectoire du ballon est assimilée à la courbe \mathcal{C} représentant une fonction f .

Les coordonnées du ballon sont donc $(x; f(x))$.

1) Etude graphique

En exploitant la figure de l'annexe à rendre avec la copie, répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la hauteur du ballon lorsque $x = 0,5$ m ?
- Le ballon atteint-il la hauteur de 5,5 m ?

2) Etude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $f(x) = -0,4x^2 + 2,2x + 2$.

- Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f .
- Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; 6]$.
- Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce lancer ?

3) Modification du lancer

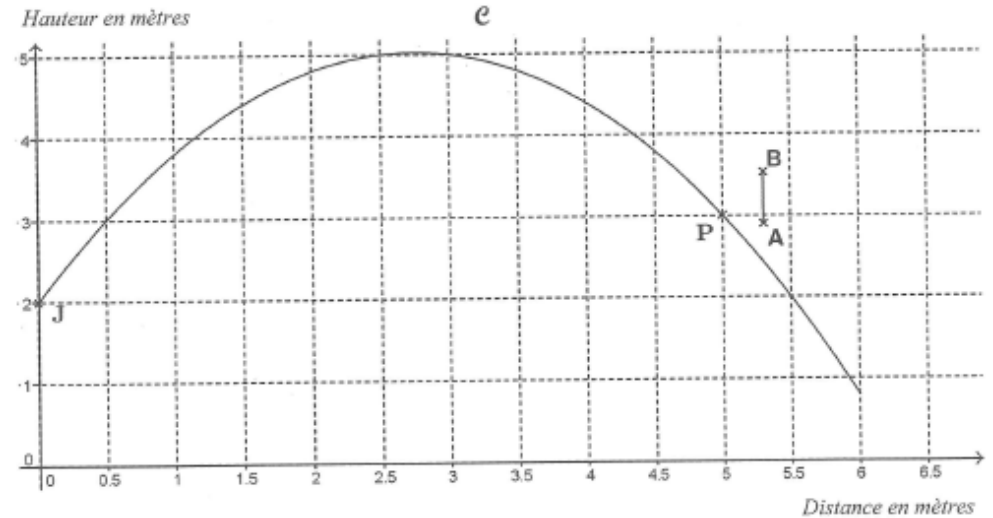
En réalité, le panneau, représenté par le segment $[AB]$ dans la figure de l'annexe à rendre avec la copie, se trouve à une distance de 5,3 m du joueur. Le point A est à une hauteur de 2,9 m et le point B est à une hauteur de 3,5 m.

Le joueur décide de modifier son lancer pour tenter de faire rebondir le ballon sur le panneau. Il effectue alors deux lancers successifs.

Dans le premier lancer, la trajectoire du ballon est modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $g(x) = -0,2x^2 + 1,2x + 2$.

Dans le second lancer, la trajectoire du ballon est modélisée par la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $h(x) = -0,3x^2 + 1,8x + 2$.

Pour chacun de ces deux lancers, déterminer si le ballon rebondit ou non sur le panneau.



Ex 13 Menu d'une brasserie (Tiré du bac Antilles - Guyane 2017)

En 2012, le gérant d'une brasserie de bord de plage propose le midi, un menu à 9,80 €.

À ce tarif, il sert en moyenne 420 couverts par semaine. Cette formule rencontre un tel succès qu'il décide d'augmenter son prix les étés suivants.

Il observe une légère diminution du nombre de couverts mais sa formule demeure rentable.

- Le nombre hebdomadaire moyen de couverts en fonction du prix x du menu est $N(x) = -19x + 604$. Le prix x du menu est exprimé en euro.
 - Calculer le nombre hebdomadaire moyen de couverts lorsque le prix du menu est de 11 €
 - Calculer le chiffre d'affaires hebdomadaire réalisé par la brasserie lorsque le menu est au prix de 11 €.
 - On note $C(x)$ le chiffre d'affaires hebdomadaire en euro pour un prix du menu de x euros. Montrer que $C(x) = -19x^2 + 604x$.
- On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 25]$ par $C(x) = -19x^2 + 604x$.
 - Déterminer l'expression de la fonction dérivée C' de C .
 - Donner le signe de $C'(x)$ sur l'intervalle $[0; 25]$.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle $[0; 25]$.
- Pour quel prix du menu le chiffre d'affaires hebdomadaire de la brasserie est-il maximal ? On arrondira le résultat au centième.
 - À ce prix, quel est le chiffre d'affaires hebdomadaire de la brasserie ? On arrondira le résultat à l'unité.

Ex 14 Propagation de la grippe (Tiré du bac Antilles - Guyanne 2016)

On s'intéresse à une modélisation de la propagation de l'épidémie de la grippe en France durant l'hiver 2014 – 2015.

Les relevés statistiques, fournis par le réseau Sentinelle, du nombre de cas pour 100 000 habitants sur la période du 29 décembre 2014 au 1^{er} mars 2015 ont permis de mettre en évidence une courbe de tendance, à l'aide d'un tableur.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in [2 ; 10]$, par $f(x) = -30x^2 + 360x - 360$.

On admet que $f(x)$ modélise le nombre de malades déclarés pour 100 000 habitants au bout de x semaines écoulées depuis le début de l'épidémie. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

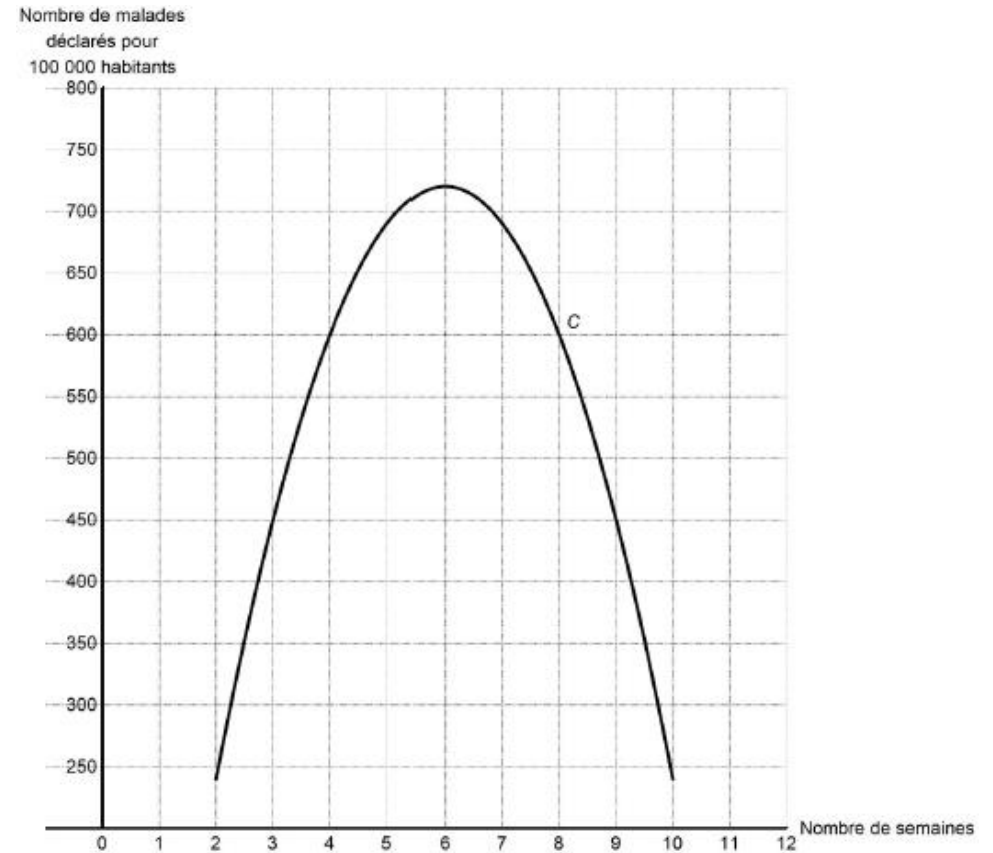
Partie A

À partir du graphique de l'annexe 2, répondre aux questions suivantes :

1. Selon ce modèle, au bout de combien de semaines le pic de l'épidémie a-t-il été atteint ?
2. Déterminer le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur ou égal à 600. On laissera les traits de justification apparents sur le graphique de l'annexe 2, à rendre avec la copie.
3. a) Montrer que $f(x) \geq 600$ équivaut à $-x^2 + 12x - 32 \geq 0$.
b) En déduire les solutions sur $[2 ; 10]$ de l'inéquation $f(x) \geq 600$.
c) Comparer avec le résultat obtenu dans la question 2.

Partie B

1. a) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[2 ; 10]$ puis résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ sur cet intervalle.
b) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2 ; 10]$.
2. a) Calculer le nombre dérivé de f en 3.
b) Tracer la tangente à C au point d'abscisse 3 dans le repère de l'annexe 2.
3. On admet que le réel $f'(x)$ représente la vitesse de propagation de l'épidémie au bout de x semaines.
La grippe se propage-t-elle plus vite au bout de 3 semaines ou de 4 semaines ? Justifier la réponse.



Ex 15 Bénéfice maximal (Tiré du bac Antilles - Guyane 2018)

Une entreprise produit des panneaux solaires. Une étude de marché permet d'estimer que la production pour le mois à venir est comprise entre 1500 et 3000 panneaux solaires. On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise sur la vente des panneaux solaires produits.

On décide de modéliser l'évolution du bénéfice de l'entreprise, exprimé en centaines d'euros, par la fonction f définie ci-dessous :

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400, \text{ pour } x \in [15 ; 30]$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[15 ; 30]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[15 ; 30]$.
2. Calculer son maximum.

Les valeurs de x , arrondies au centième, représentent le nombre de centaines de panneaux solaires produits.

3. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?

Enigme 1 Trouver deux nombres entiers consécutifs dont le produit vaut 4422.

Enigme 2 Un jardinier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour ses poules. Il dispose dans son garage de 21m de grillage. Afin d'obtenir un enclos plus grand, il compte utiliser le mur du jardin pour former un côté de l'enclos et utiliser le grillage pour former les trois autres côtés. Comment doit-il faire pour construire le plus grand enclos possible ?

