

## Chap F3 : Polynômes de degré 3

### 1 – Définition et Dérivée

**Définition 1** : On appelle **polynôme du troisième degré** toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  avec  $a \neq 0$

**Exemple 1** : La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$  est un polynôme de degré 3  
Ses coefficients sont  $a = 2, b = 4, c = 5$  et  $d = -1$

**Définition 2** : On considère  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  un polynôme du **troisième degré** avec  $a \neq 0$   
On appelle **fonction dérivée** de  $f$ , la fonction  $f'$  définie par  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

**Exemple 2** : Calculer la dérivée  $f'$  du polynôme du troisième degré  $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ .

$f(x) = \overset{3}{2}x^{\overset{2}{2}} + \overset{2}{4}x^{\overset{1}{2}} + 5x - 1$  donc  $f'(x) = 3 \times 2x^2 + 2 \times 4x + 5$  donc  $f'(x) = 6x^2 + 8x + 5$ .

**Remarque** : La dérivée d'un polynôme du troisième degré est un polynôme du second degré

### 2 – Sens de variation

**Théorème 2** : Soit  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  un polynôme du troisième degré et  $I$  un intervalle. Alors :

- Si pour tout  $x$  de  $I, f'(x) > 0$  alors  $f$  est **croissante** sur  $I$ .
- Si pour tout  $x$  de  $I, f'(x) < 0$  alors  $f$  est **décroissante** sur  $I$ .

**Exemple 3** : Déterminer le tableau de variation des polynômes du troisième degré suivant :

1)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

On commence par calculer la dérivée  $f'$  :  $f'(x) = 3x^2 - 2 \times 6x + 9$  donc  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

La dérivée est un polynôme du second degré dont les coefficients sont  $a = 3 ; b = -12 ; c = 9$ .

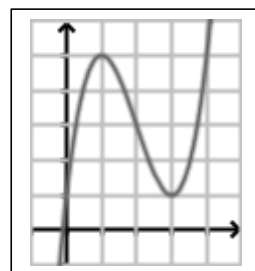
Pour déterminer son signe, on commence par chercher ses racines.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 144 - 108 = 36 > 0$  donc  $f'$  admet deux racines :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{12 - 6}{6} = \frac{6}{6} = 1$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) + \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{12 + 6}{6} = \frac{18}{6} = 3$

La fonction  $f'$  est toujours du signe de  $a$  qui est positif, sauf entre ses racines.

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$\nearrow$ 5 $\searrow$ 1 $\nearrow$			



$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

$f(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$



2)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

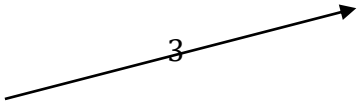
On commence par calculer la dérivée  $f' : f'(x) = 3x^2 - 2 \times 3x + 3 \times 1 = 3x^2 - 6x + 3$

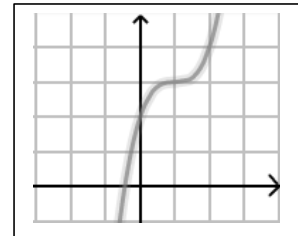
La dérivée est un polynôme du second degré dont les coefficients sont  $a = 3; b = -6; c = 3$

Pour déterminer son signe, on commence par chercher ses racines.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0 \text{ donc } f' \text{ n'admet une racine } x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = 1.$$

La fonction  $f'$  est toujours du signe de  $a$  qui est positif.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			



$$f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 2 = 1 - 3 + 3 + 2 = 3$$

3)  $f(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1$

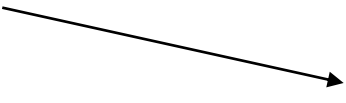
On commence par calculer la dérivée  $f' : f'(x) = (-2) \times 3x^2 + 2x - 1 = -6x^2 + 2x - 1$

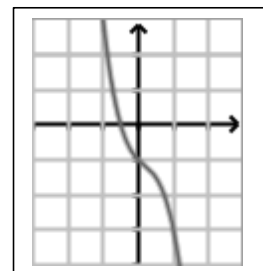
La dérivée est un polynôme du second degré dont les coefficients sont  $a = -6; b = 2; c = -1$ .

Pour déterminer son signe, on commence par chercher ses racines.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times (-6) \times (-1) = -20 < 0 \text{ donc } f' \text{ n'admet pas de racines.}$$

La fonction  $f'$  est toujours du signe de  $a$  qui est négatif.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

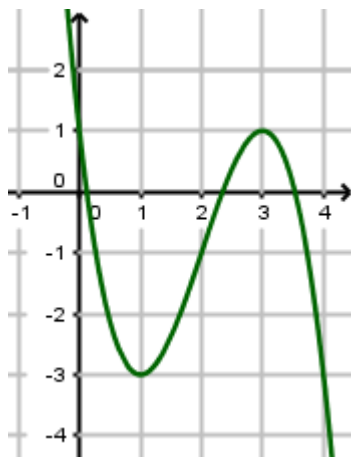


## Polynômes de degré 3 – Fiche d'exercices

**Ex 1** Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$
- $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 10$
- $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
- $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 0,5$

**Ex 2** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ . On a tracé ci-dessous sa courbe représentative.



- Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- Retrouver par le calcul le tableau de variation de la fonction  $f$ .

**Ex 3** A l'aide de la dérivée  $f'$  de  $f$ , déterminer le tableau de variation de la fonction  $f$ , puis tracer dans un repère l'allure de la courbe  $f$

- $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x$
- $g(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$
- $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$
- $k(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 4x + 1$

**Ex 4** (Boîte sans couvercle)

La problématique de l'exercice est la suivante :

A l'aide d'un simple feuille A4, comment construire une boîte sans couvercle (voir *Figure 1*) de volume maximale ?

Le patron d'une telle boîte est obtenue en découpant 4 coins de même dimension sur la feuille A4 (voir *Figure 2*). En fonction de la taille  $x$  du coin découpé on obtiendra une boîte de volume différente.

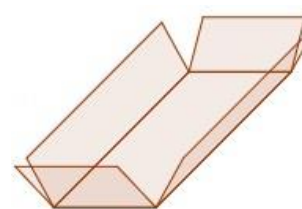


Figure 1

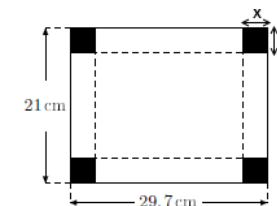
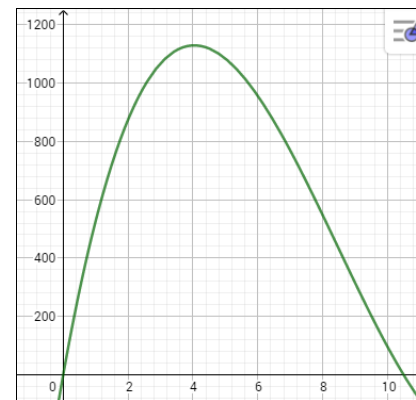


Figure 2

- On note  $V(x)$  le volume de la boîte obtenue en découpant un coin de  $x$  cm.
  - Calculer  $V(1)$  et  $V(5)$ .
  - Quel est l'ensemble de définition de la fonction  $V$  ?
  - Exprimer  $V(x)$  en fonction de  $x$  puis montrer que
 
$$V(x) = 4x^3 - 101,4x^2 + 623,7x$$
- Etude de la fonction  $V$ 
  - Calculer  $V'(x)$
  - Réaliser le tableau de variation de la fonction  $V$ .
  - Répondre à la problématique.
- On a tracé ci-dessous la courbe de la fonction  $V$ .
  - Vérifier la réponse précédente.
  - Est-il possible de construire une boîte d'exactly 1L ?

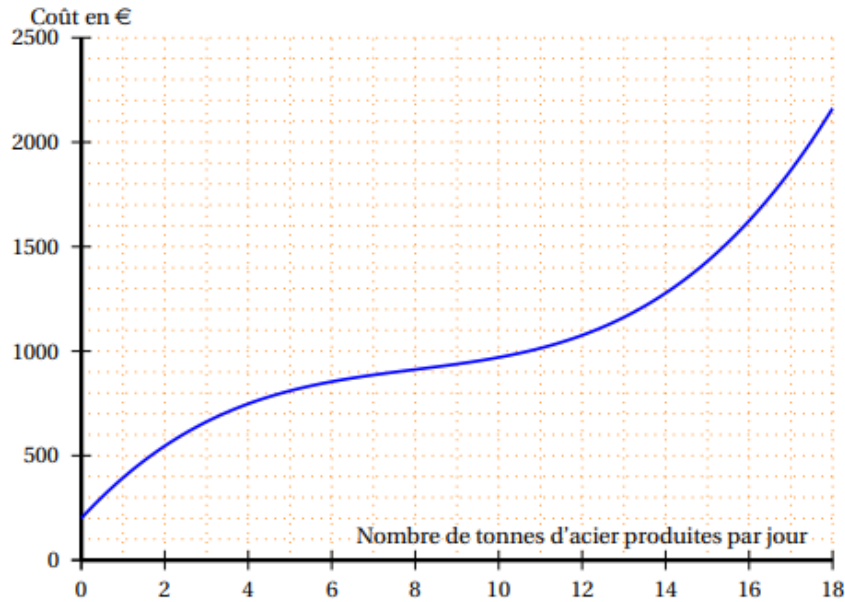


### Ex 5 Production d'acier (Tiré du bac Antilles Guyane Septembre 2014)

On s'intéresse à la production d'acier par un fabricant donné. La production journalière varie entre 0 et 18 tonnes d'acier.

#### Partie A : lecture graphique

La fonction  $C$  représentée graphiquement ci-dessous donne le coût total de production en euros en fonction du nombre de tonnes d'acier produites par jour.



À l'aide de cette courbe, répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique :

1. Quel est le coût total de production pour 12 tonnes d'acier produites par jour ?
2. Combien de tonnes d'acier sont produites par jour pour un coût total de production de 1600 € ?

#### Partie B : étude du bénéfice

La fonction coût de la partie précédente est la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 18]$  par :

$$C(x) = x^3 - 24x^2 + 217x + 200.$$

On suppose que, chaque jour, tout l'acier est vendu, au prix de 100 € la tonne.

1.
  - a. Calculer la recette, en euros, réalisée pour la vente de 12 tonnes d'acier.
  - b. On appelle  $R(x)$  la recette, en euros, réalisée pour la vente de  $x$  tonnes d'acier. Déterminer l'expression de  $R(x)$  en fonction de  $x$ .
  - c. On appelle  $B(x)$  le bénéfice (éventuellement négatif), en euros, réalisé pour la vente de  $x$  tonnes d'acier. Justifier que  $B(x) = -x^3 + 24x^2 - 117x - 200$ .

2.
  - a. Déterminer une expression  $B'(x)$  de la fonction dérivée de  $B$  sur l'intervalle  $[0; 18]$ .
  - b. Justifier le tableau de signes de  $B'(x)$  suivant :

$x$	0	3	13	18	
Signe de $B'(x)$	-	0	+	0	-

- c. En déduire le tableau de variations complet de la fonction  $B$ .

3. On a préparé une feuille de calcul où figure le bénéfice total (en euros), en fonction de la quantité d'acier produite par jour.

- a. Proposer une formule à saisir dans la cellule B2 permettant, par recopie vers le bas, de compléter les cellules de B3 à B20.
  - b. Proposer de même une formule à saisir dans la cellule D2, permettant, par recopie vers le bas, de compléter les cellules de D3 à D20.

4. Utiliser les résultats figurant dans la feuille de calcul pour répondre aux questions suivantes :

- a. Quelles sont les productions, en nombres entiers de tonnes, permettant au fabricant de faire du profit ?
  - b. Quelle est la quantité, en nombre entier de tonnes, qui assure un bénéfice total maximal ?

5. Répondre par « Vrai » ou par « Faux » aux affirmations suivantes, en justifiant votre choix :

- a. Plus la production d'acier est grande, plus le bénéfice est grand.
  - b. Si la production est doublée, le bénéfice total est également doublé.

	A	B	C	D
1	Tonnes d'acier par jour	Recette	Coût	Bénéfice total en €
2	0	0	200	-200
3	1	100	394	-294
4	2	200	546	-346
5	3	300	662	-362
6	4	400	748	-348
7	5	500	810	-310
8	6	600	854	-254
9	7	700	886	-186
10	8	800	912	-112
11	9	900	938	-38
12	10	1 000	970	30
13	11	1 100	1 014	86
14	12	1 200	1 076	124
15	13	1 300	1 162	138
16	14	1 400	1 278	122
17	15	1 500	1 430	70
18	16	1 600	1 624	-24
19	17	1 700	1 866	-166
20	18	1 800	2 162	-362

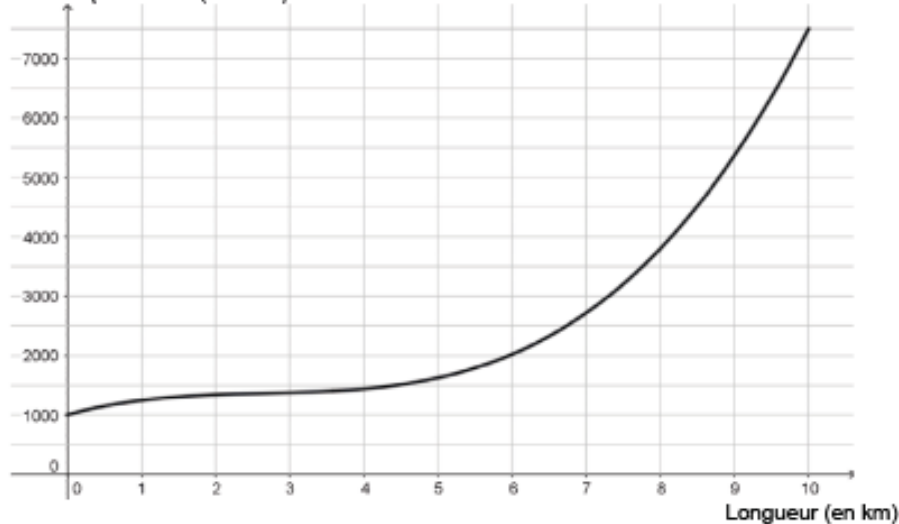
### Ex 6 Production de tissu (Tiré du bac Métropole 2017)

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note  $x$  sa longueur exprimée en kilomètre,  $x$  étant un nombre compris entre 0 et 10. Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de  $x$ , par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000.$$

La courbe de la fonction  $C$  est représentée sur le graphique ci-dessous.

Coût total de production (en euro)



#### Partie A : Étude du coût total

- Déterminer le montant des coûts fixes.
- a) Déterminer, par lecture graphique, le montant du coût total lorsque l'entreprise produit 8 km de tissu.  
b) Déterminer par un calcul sa valeur exacte.
- Déterminer graphiquement la longueur, arrondie au kilomètre, de tissu produit lorsque le coût total s'élève à 5 500 €.

#### Partie B : Étude du bénéfice

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise. Pour tout  $x \in [0; 10]$ , on note  $R(x)$  la recette et  $B(x)$  le bénéfice générés par la production et la vente de  $x$  kilomètres de tissu par l'entreprise.

- Exprimer  $R(x)$  en fonction de  $x$ .
- Montrer que pour tout  $x \in [0; 10]$ ,  $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1\,000$ .
- Déterminer  $B'(x)$  pour  $x \in [0; 10]$  où  $B'$  désigne la fonction dérivée de  $B$ .
- Étudier le signe de  $B'(x)$  et en déduire les variations de la fonction  $B$  sur  $[0; 10]$ .
- a) Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?  
b) Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.

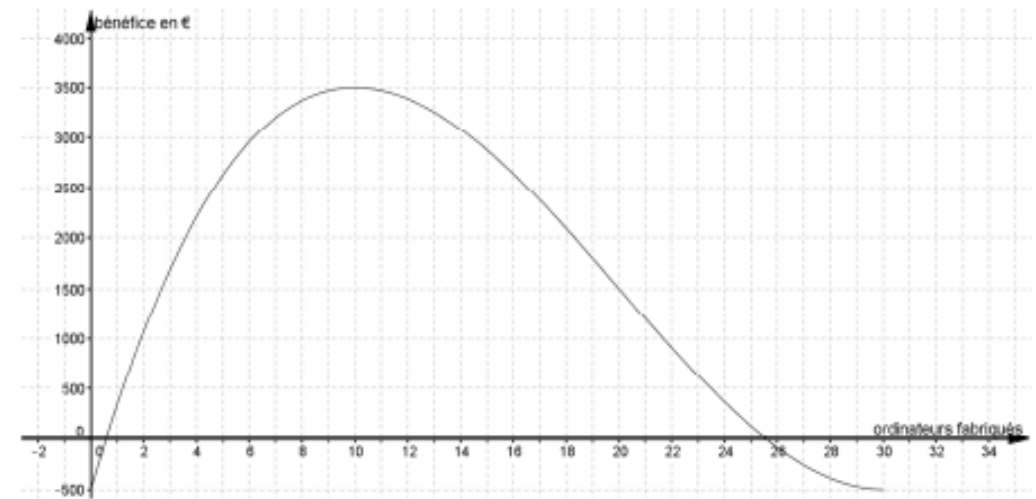
### Ex 7 Fabrication ordinateurs (Tiré du bac Polynésie 2015)

Une entreprise, qui fabrique et vend des ordinateurs sur commande, modélise le bénéfice en euros pour  $x$  ordinateurs fabriqués et vendus en une journée, par la fonction :

$$f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x - 500$$

L'entreprise ne pouvant construire plus de 30 ordinateurs par jour, on aura  $0 \leq x \leq 30$ .

- a. Calculer le bénéfice pour 4 puis pour 10 ordinateurs.  
b. Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .  
c. Dresser, après avoir étudié le signe de  $f'$ , le tableau de variation de  $f$ .  
d. En déduire combien d'ordinateurs l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour pour avoir un bénéfice maximal. Donner ce bénéfice.
- La courbe  $C$  donnée ci-dessous représente l'évolution du bénéfice en fonction du nombre d'ordinateurs fabriqués et vendus en une journée suivant le modèle choisi par l'entreprise.



- Par lecture graphique, déterminer combien l'entreprise doit fabriquer et vendre d'ordinateurs en une journée si elle veut un bénéfice d'au moins 2500 €.
- Une grande surface veut acheter des ordinateurs. Elle propose au choix deux contrats à cette entreprise :
  - contrat A : acheter 300 ordinateurs à fabriquer en dix jours ;
  - contrat B : acheter 100 ordinateurs à fabriquer en cinq jours.

Quel contrat l'entreprise a-t-elle intérêt à choisir ? (Justifier votre réponse).

### Ex 8 Coques téléphones mobiles (Tiré du bac Polynésie 2014)

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique donné en annexe 2 page 8 sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de produits fabriqués exprimé en centaines d'unités.

On admet que la fabrication est comprise entre 0 et 700 unités.

Les recettes et les coûts sont exprimés en milliers d'euros.

#### Partie A lecture graphique

Répondre aux questions suivantes en vous aidant du graphique de l'annexe 2 page 8.

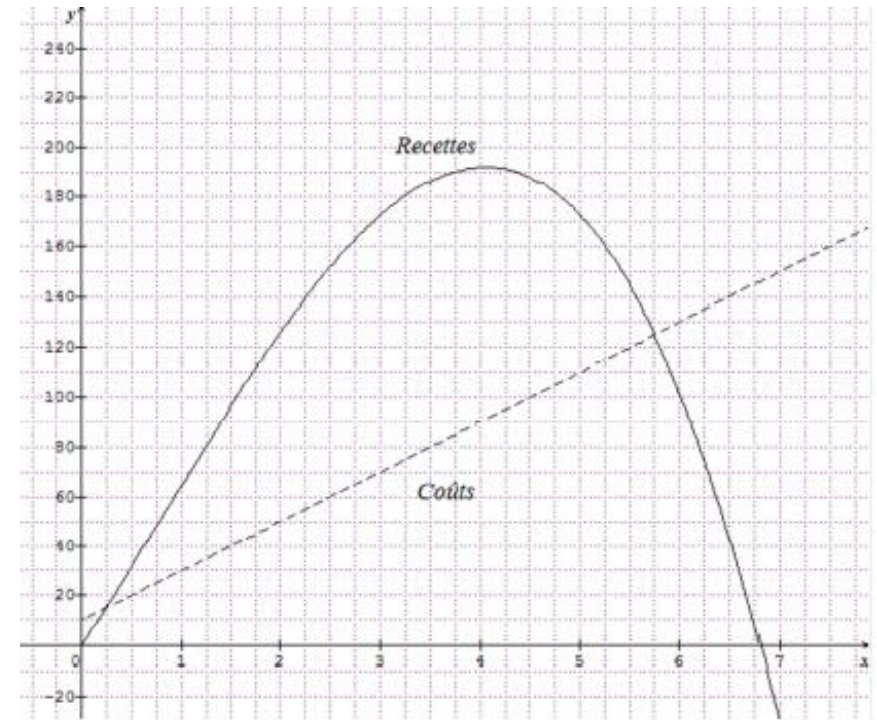
1. Combien faut-il fabriquer de produits pour avoir une recette égale à 140 000 euros ?
2. Combien de produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice positif ou nul ?

#### Partie B étude du bénéfice

On modélise :

- les recettes par la fonction  $R$  définie sur  $[0 ; 7]$  par  $R(x) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x$ ,
- les coûts par la fonction  $C$  définie sur  $[0 ; 7]$  par  $C(x) = 20x + 10$ .

1. Calculer la recette et le coût pour 300 produits fabriqués.  
En déduire le bénéfice correspondant.
2. On note  $B$  la fonction bénéfice.  
Donner l'expression de  $B(x)$  sur l'intervalle  $[0; 7]$ .
3. Vérifier que  $B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$  où  $B'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $B$ .
4. Etudier le signe de  $B'(x)$ . Donner le tableau de variations de  $B$ .
5. En déduire la valeur du bénéfice maximal ainsi que le nombre de produits à fabriquer pour l'obtenir.



### Ex 9 Brosse à dents connectées (Tiré du bac Métropole Septembre 2017)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

**Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.**

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une entreprise fabrique et vend des brosses à dents connectées. On modélise le bénéfice en euro pour  $x$  centaines de brosses à dents fabriquées et vendues par semaine par la fonction  $B$  définie sur  $[0 ; 9]$  par :  $B(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1917x - 200$ . La courbe représentative du bénéfice hebdomadaire est donnée en annexe 2.

**Affirmation 1 :** Fabriquer et vendre 600 brosses à dents connectées par semaine est rentable pour l'entreprise.

**Affirmation 2 :** La fonction  $B'$ , dérivée de la fonction  $B$ , est définie pour tout  $x \in [0 ; 9]$  par  $B'(x) = 120x^2 - 1122x + 1917$ .

**Affirmation 3 :** La fonction  $B'$ , dérivée de la fonction  $B$ , s'annule trois fois dans l'intervalle  $[0 ; 9]$ .

**Affirmation 4 :** Le bénéfice hebdomadaire maximum est réalisé pour 224 brosses à dents fabriquées et vendues.

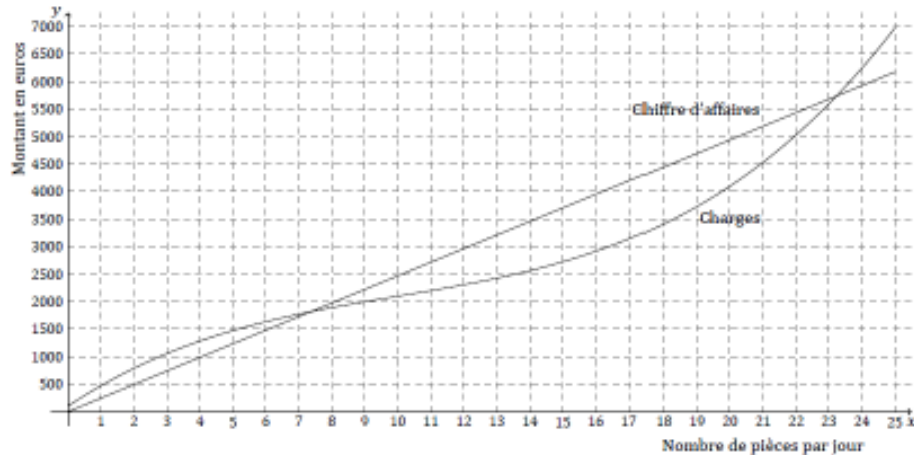
### Ex 10 Pièces métalliques (Tiré du bac Pondichery 2017)

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

#### Partie A : Lectures graphiques

À l'aide du graphique donné ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le montant des charges pour 5 pièces produites par jour ?
2. Combien de pièces sont produites par jour pour un montant des charges de 2000 euros ?
3. Quelles quantités produites par jour permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice ?



#### Partie B : Étude du bénéfice

Le montant des charges correspondant à la fabrication de  $x$  pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction  $C$  définie sur l'intervalle  $[0; 25]$  par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100.$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note  $B$  la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de  $B(x)$  sur l'intervalle  $[0; 25]$  est :  $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$ .
2. On note  $B'$  la fonction dérivée de la fonction  $B$ . Calculer  $B'(x)$ , pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 25]$ .
3. Justifier le tableau suivant :

$x$	0	3	17	25		
Signe de $B'(x)$		-	0	+	0	-

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[0; 25]$ .
5. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

#### Partie C : Coût moyen

On appelle coût moyen la fonction  $C_M$  définie sur l'intervalle  $]0; 25]$  par  $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

1. Calculer  $C_M(16)$  et  $C_M(17)$ . On arrondira au centime d'euro.
2. On donne le tableau de variations de la fonction  $C_M$  :

$x$	0	15,2	25
$C_M(x)$		181,6	279

L'affirmation suivante est-elle vraie ? « Lorsque le bénéfice de l'entreprise augmente, le coût moyen diminue. » Justifier la réponse.