Chapitre 2 : Polynômes et Equations du second degré

1 – Polynôme du second degré

Définition 1 : Soit a, b et c trois nombres réels tel que $a \neq 0$. On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple 1 : Les fonctions suivantes sont-elles des polynômes du second degré ? Si, oui quels sont ses coefficients ?

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$
- $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}x$
- $h(x) = 2 - x^2$
- $i(x) = 2x + 1$
- $j(x) = x^2$
- $k(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Activité 1 : A l'aide du logiciel Geogebra

1) a. Créer trois curseurs « nombres » a, b et c, variant entre -5 et 5, par pas de $0{,}1$.

   b. Tracer la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   c. Comment appelle-t-on la courbe obtenue ?

2) Que se passe-t-il si l'on place le curseur sur « 0 »

3) A l'aide des curseurs faire varier les coefficients a, b et c puis compléter le tableau suivant :

Effet sur la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Coefficient**
Le signe de ce coefficient oriente la parabole « vers le haut » ou « vers le bas ».	
La variation de ce coefficient déplace la parabole dans le sens vertical	
La variation de ce coefficient déplace la parabole horizontalement et verticalement	
La variation de ce coefficient change la « forme » de la parabole	
Ce coefficient correspond à la valeur en laquelle la courbe coupe l'axe des ordonnées.	

4) a. Dans le champ de saisie définir le nombre $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

   b. Dans le champ de saisie définir le nombre $\beta = f(\alpha)$.

5) Placer le point S de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

   Que remarque t-on ?

2 – Etude des fonctions polynômes du second degré

a. Courbe représentative

Propriété 1 :

● La courbe d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole**.

● Si $a > 0$ alors la parabole est orientée vers le **haut**, si $a < 0$ alors la parabole est orientée vers le **bas.**

● De plus si on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ alors le **sommet** S de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha, \beta)$.

Exemple 2 : Déterminer l'orientation et le sommet de la parabole des polynômes suivants :

● $f(x) = 3x^2 + x - 2$

● $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

b. Sens de variation

Propriété 2 : Les variations du polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont données par les tableaux suivants :

● Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\nearrow$

● Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\searrow$

Exemple 3 : Réaliser le tableau de variations des polynômes suivants :

● $f(x) = 3x^2 + x - 2$

● $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

c. Extremums

Propriété 3 : On considère un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$

● Si $a > 0$ alors f admet un **minimum** en α qui vaut β

● Si $a < 0$ alors f admet un **maximum** en α qui vaut β

Exemple 4 : Une entreprise fabrique un produit et souhaite définir son prix de vente optimal. Après une étude de marché, il s'avère que le bénéfice par an (en K€) de l'entreprise en fonction du prix de vente (en €) de son produit peut être représenté par la fonction f définie sur $[0,10]$ par $f(x) = -20x^2 + 200x - 420$. Quel est le prix de vente optimal ? Quel est le bénéfice correspondant ?

3 – Equation du second degré

Définition 2 : On appelle **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

Exemple 2 : Calculer le discriminant des équations suivantes :

1) $x^2 - x - 1 = 0$

2) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

3) $-3x^2 + x - 2 = 0$

Activité 2 : Reprendre le fichier Geogebra de l'activité 1

1) Dans le champ de saisie définir le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
2) A l'aide des curseurs faire varier les coefficients a, b et c puis compléter le tableau suivant :

Effet sur la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Signe de Δ**
La courbe intersecte 2 fois l'axe des abscisses	
La courbe intersecte 1 fois l'axe des abscisses	
La courbe intersecte 0 fois l'axe des abscisses	

Propriété 4 : On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation possède **deux** solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation possède **une** solution unique : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation possède **aucune** solution.

Remarque : On dit que x_0, x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$

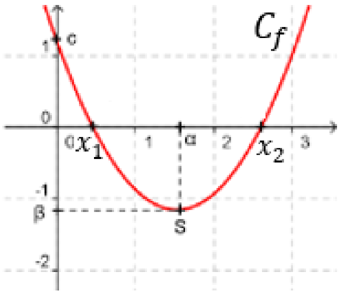
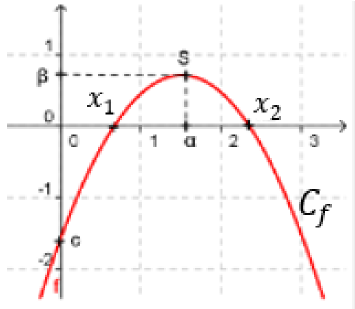
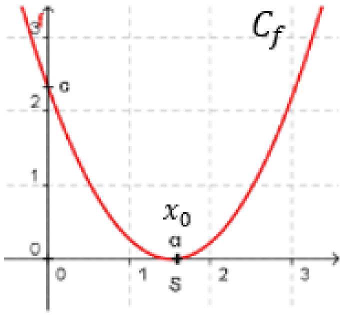
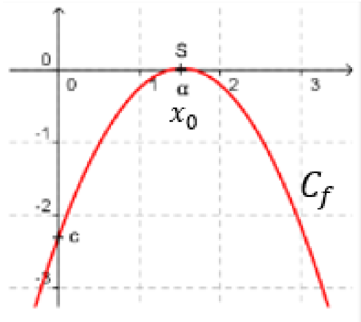
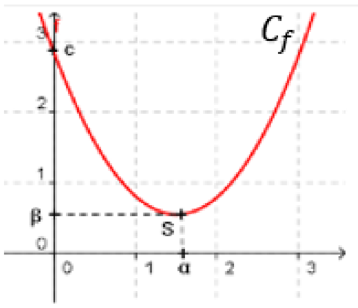
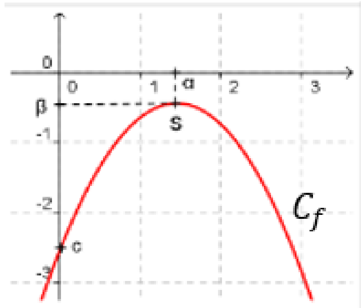
Exemple 3 : Résoudre les équations du second degré suivantes

1) $x^2 - x - 1 = 0$

2) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

3) $-3x^2 + x - 2 = 0$

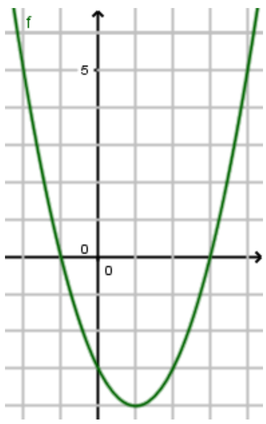
4 – Représentation graphique

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

a→ Orientation de la parabole vers le haut $(a > 0)$ ou vers le bas $(a < 0)$
c→ Ordonnée à l'origine
Δ→ Son signe donne le nombre de racines de f
x_0, x_1, x_2→ Racines de f
α→ Lieu de l'extremum de f
β→ Valeur de l'extremum de f

Exemple 4 : Soit f une fonction polynôme du second degré dont on a tracé la courbe ci-dessous.

En utilisant la courbe, déterminer :



1) Le signe de a
2) La valeur de c
3) Le signe de Δ
4) Les racines de f
5) La valeur de α.
6) La valeur de β

Polynômes, équations du second degré – Exercices

Polynôme du second degré

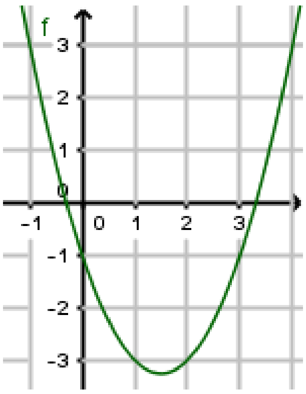
1 Les fonctions données ci-dessous sont-elles des polynômes du second degré ? Si oui, identifier les coefficients :

a. $f(x) = -x^2 - 3x + 5$
b. $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 0{,}5x$
c. $h(x) = \frac{3}{8} - 0{,}1x^2 + 10x$
d. $i(x) = 2 - 5x^2$
e. $j(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 4$
f. $k(x) = x^3 + x + 1$

2 Développer, simplifier et ordonner chacune des expressions suivantes puis indiquer s'il s'agit ou non de polynômes du second degré.

a. $A(x) = (x^3 - 3x^2 + 4x - 5) - (2 - x^3)$
b. $B(x) = (2x + 1)(3x - 5)$
c. $C(x) = (4x + 1)^2$
d. $D(x) = (5 - 2x)^2 - (1 - 3x)$
e. $E(x) = (x + 3)^2 - (x - 1)^2$
f. $F(x) = \frac{x-5}{3} + \frac{2-x}{6} - x^2$
g. $G(x) = \left(\frac{1}{3}x + 6\right)^2$

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 1$ dont on a tracé la courbe représentative ci-dessous.



1) Déterminer graphiquement puis par le calcul
   a. L'image de 1.
   b. $f(-1)$
   c. $f(\frac{1}{2})$
2) Quel(s) sont les antécédents de -1 par f ?
3) Compléter le tableau suivant :

x	-1	0	$0{,}5$	$0{,}75$	1	
$f(x)$						-1

4) Le point $M(2; -3)$ appartient-il à la courbe de la fonction f?

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x - 1)(x + 3)$.

1) Montrer que f est un polynôme du second degré et identifier ses coefficients
2) a. Quelle est l'orientation de la parabole qui représente f ?
   b. En quelle valeur la parabole coupe-t-elle l'axe des ordonnees
   c. Quels sont les coordonnées du sommet de la parabole ?
3) Dans un repère, tracer la courbe de f.

6 On a réalisé ci-dessous le tableau de variation et le tableau de signe d'un polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tracer la courbe représentative de la fonction f.

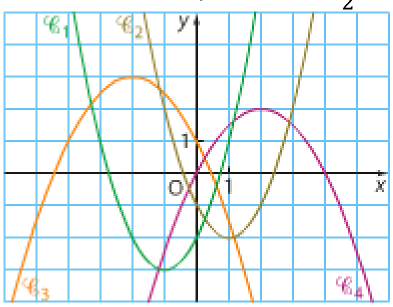
7 Réaliser le tableau de variation des fonctions suivantes, et déterminer leur(s) extremum(s). Vérifier vos résultats en traçant leurs courbes sur calculatrice.

a. $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$
b. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$
c. $h(x) = (x + 1)^2 - 9$
d. $k(x) = (x + 2)(x - 1)$

8 Attribuer à chacune des fonctions suivantes la bonne courbe

$f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ $\quad$ $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

$f_3(x) = x^2 - 2x - 1$ $\quad$ $f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$



Equations du second degré

9 Résoudre les équations suivantes :

a. $3x - 5 = 0$
b. $\frac{1}{2}x - 5 = 0$
c. $2x + 3 = 5 - 7x$
d. $(x+4)^2 - (x-3)^2 = 0$
e. $x^2 = x$

10 Quel est le nombre de solutions des équations suivantes ?

a. $x^2 - x + 7 = 0$
b. $x^2 + 2x + 1 = 0$
c. $-2x^2 + 3x + 10 = 0$
d. $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{7}{2} = 0$
e. $10 - x = 2x + 7$

11 On considère le polynôme du second degré $P(x) = x^2 - 2x - 3$. Montrer que -1 et 3 sont racines de ce polynôme.

12 On considère le polynôme du second degré $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$. Montrer que -3 et $\frac{1}{2}$ sont racines de ce polynôme.

13 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 - 2x - 15 = 0$
b. $3x^2 - 7x + 9 = 0$
c. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
d. $-2x^2 - x + 1 = 0$
e. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

14 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 + 13 = 0$
b. $4 - 3x^2 + 5x = 0$
c. $5x^2 - x + 10 = 1$
d. $-2x^2 = 5x + 3$
e. $3(x+1)^2 - 5(x+1)^2 = 44$

15 Résoudre les équations suivantes :

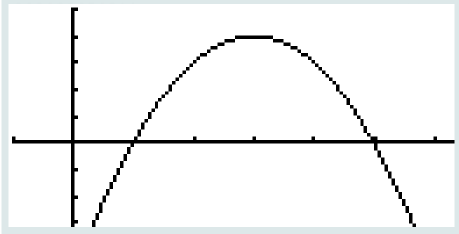
a. $-6t^2 + t + 1 = 0$
b. $9u + 4 = (u+2)^2$
c. $-7v^2 + v = 8$
d. $(2w+9)(5w+1) = 0$
e. $7y^2 + 13y = (8y)^2$

16 Ecrire un algorithme permettant de résoudre une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

17 On souhaite résoudre l'équation.

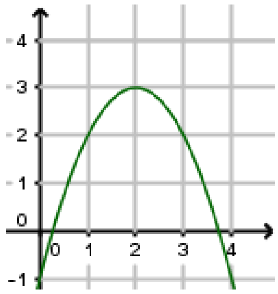
$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

1) Tracer la fonction $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ sur la calculatrice puis conjecturer les solutions de cette équation.



2) Vérifier par le calcul les résultats précédents

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ et dont on a tracé la courbe représentative ci-dessous.

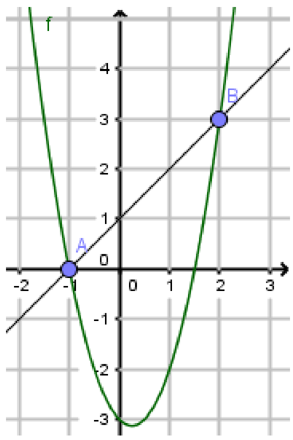


1) Déterminer graphiquement s'ils existent

a. Les antécédents de 2 par f
b. Les antécédents de 3 par f
c. Les antécédents de 4 par f

2) Retrouver par le calcul les résultats précédents.

19 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ et $g(x) = x + 1$. On a tracé ci-dessous leurs courbes représentatives.



1) Identifier les courbes des fonctions f et g.

2) Déterminer graphiquement le(s) solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

3) Résoudre algébriquement cette équation.

Problèmes

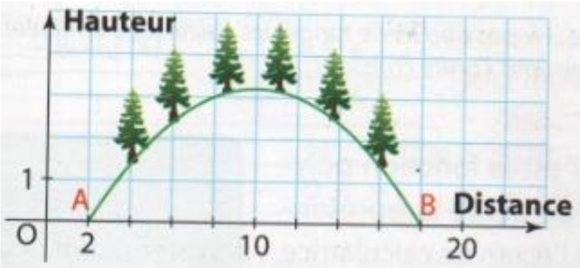
20 Trouver deux nombres entiers consécutifs dont le produit vaut 4422.

21 L'aire d'un rectangle vaut 80m². L'un des côtés mesure 2m de plus que l'autre. Quels sont ses dimensions ?

22 On a modélisé la silhouette d'une montagne à l'aide d'une parabole qui est la courbe représentative de la fonction du second degré :

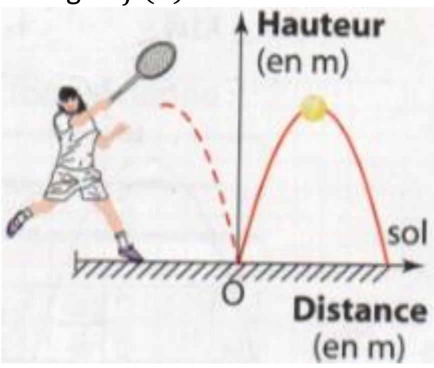
$$f(x) = -0.05x^2 + x - 1.8$$

Les unités sont en centaines de mètres.



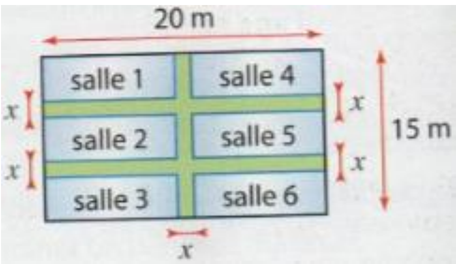
Quelle est l'altitude de la montagne ?

23 Une balle de tennis rebondit en suivant une trajectoire parabolique représentant la fonction du second degré $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.



1) A quelle hauteur la balle rebondit-elle ?
2) A quelle distance la balle touche-t-elle le sol ?

24 Le chef des travaux du Lycée doit aménager un bâtiment de l'établissement. Ce bâtiment de 300 m^2 doit comporter 6 salles de classe de taille égale, séparée par des couloirs, selon le schéma ci-dessous.

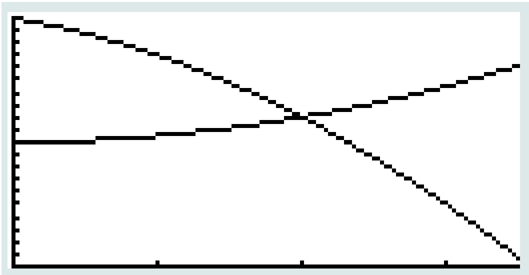


Déterminer quelle doit être la largeur des couloirs pour obtenir une surface totale de salle 200 m^2.

25 **L'offre** d'un bien est la quantité d'un produit offert à la vente par les vendeurs pour un prix donné. La **demande** est la quantité d'un produit demandée par les acheteurs pour un prix donné.
Un producteur de légumes vend des pommes de terre. x désigne le prix du kilo de pommes de terre en euros avec $0,5 \leqslant x \leqslant 3,5$.
L'offre en tonne est $O(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$.
La demande en tonne est $D(x) = -x^2 - 2x + 20$
On se propose de trouver le **prix d'équilibre**, c'est à dire le prix lorsque l'offre est égale à la demande.

1) Quelle l'offre et la demande pour un prix au kilo de 1€ ? de 3€ ? Interpréter le résultat économiquement.

2) <u>Résolution graphique</u>
Tracer sur la calculatrice la courbe des fonctions O et D en réglant la fenêtre de la façon suivante : $0 \leq X \leq 3,5$ et $0 \leq Y \leq 20$.
On obtient le graphique suivant :



Déterminer graphiquement le prix d'équilibre puis la quantité de pomme de terre correspondante.

3) <u>Résolution algébrique</u>
Retrouver par le calcul le prix d'équilibre ainsi que la quantité de pommes de terre correspondante.