Chapitre P2 : Probabilités conditionnelles

0 – Rappels sur les probabilités

Exemple 1 : Dans un jeu de 52 cartes on pioche une carte au hasard.

1) a. Justifier qu'il s'agit bien d'une **expérience aléatoire.**

Il s'agit d'une expérience dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance

b. Quel est **l'univers** associé à cette expérience aléatoire ?

L'univers noté Ω *est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience :* $\Omega = \{A♠ \,; A♡; A♦; A♣ \,; \dots ; 2♣\}$

c. Donner une **issue** possible.

Une issue est un des résultats possibles de l'expérience, par exemple $D♡$*. On note alors* $D♡ \in \Omega$

d. Est-t-on dans une situation **d'équiprobabilité** ?

Oui, car toutes les issues ont la même probabilité : on a autant de chance de piocher chaque carte.

2) Ecrire les **événements** suivants sous forme d'ensemble puis calculer leur **probabilité** :

A : « Piocher un coeur » : $A = \{A♡;\ R♡; D♡; \dots ; 2♡\}$. On a $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

B : « Piocher une figure » : $B = \{R♠; D♠; V♠; \dots ; V♣\}$. On a $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \approx 0.23 \approx 23\%$

3) a. Calculer la probabilité de **ne pas** piocher de figure

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.25 = 0.75 = 75\%$

b. Calculer la probabilité de piocher un cœur **et** une figure

$A \cap B = \{R♡; D♡; V♡\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{3}{52} \approx 0.06 \approx 6\%$

c. Calculer la probabilité de piocher un cœur **ou** une figure

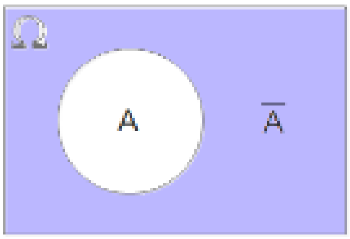
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26} \approx 0.42 \approx 42\%$

Propriété 1 : On considère une expérience aléatoire d'univers Ω ainsi que deux évènements A et B.

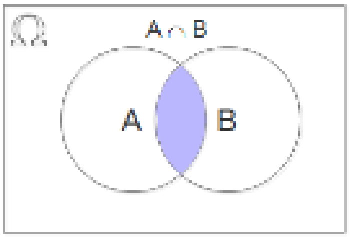
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui le compose.
- Si on est dans une situation d'équiprobabilité, alors $P(A) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ d'issues\ total}$.
- On a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Opération sur les évènements :

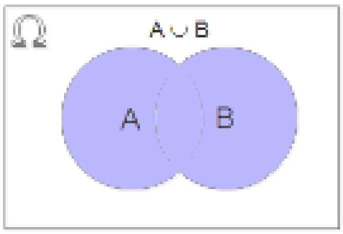
Contraire : $non\ A$



Intersection : $A\ et\ B$



Réunion : $A\ ou\ B$



1 – Arbres pondérés

Pour représenter une expérience aléatoire, il est parfois utile d'utiliser un **arbre pondéré.**

Exemple 2 : L'Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies (OFDT) a réalisé une enquête auprès des jeunes de 18 à 25 ans sur leur consommation de tabac et d'alcool. Parmi les personnes interrogés :

• 78 % d'entre eux déclarent consommer de l'Alcool (au moins une fois lors du dernier mois)

• Parmi ceux qui consomment de l'alcool, 43 % d'entre eux déclarent consommer également du tabac.

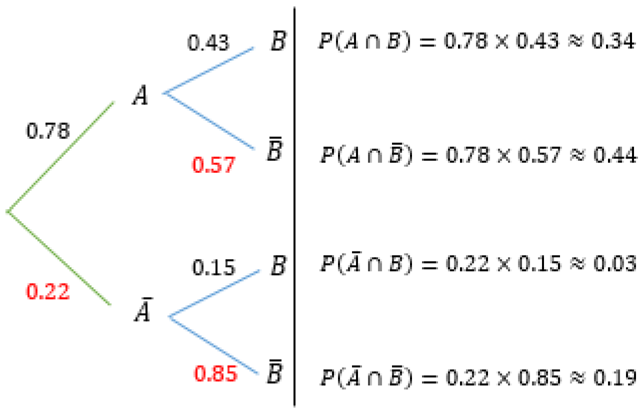
• Parmi ceux qui ne consomment pas d'alcool, 15 % d'entre eux déclarent consommer du tabac.

On interroge un jeune au hasard. On considère les évènements suivants :

A : « La personne interrogée consomme de l'alcool »

B : « La personne interrogée consomme du tabac »

1) Compléter l'arbre pondéré suivant :



2) a. Quel est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac et de l'alcool.

D'après l'arbre on a $P(A \cap B) \approx 0.34$, *donc la probabilité est d'environ* $34~\%$.

b. Quel est la probabilité que la personne interrogée ne consomme ni tabac ni alcool.

D'après l'arbre on a $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \approx 0.19$, *donc la probabilité est d'environ* $19~\%$.

3) Quel est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac.

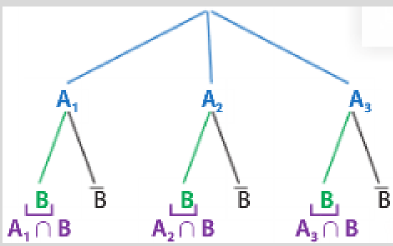
$P(B) = P(A \cap B) + \ P(\bar{A} \cap B) \approx 0.34 + 0.03 \approx 0.37$, *donc la probabilité est d'environ* $37~\%$.

Propriété 2 : Dans un arbre pondéré, on peut utiliser les 3 règles suivantes

• Règle 1 : À partir d'un même nœud, la somme des probabilités est égale à 1.

• Règle 2 : Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.

• Règle 3 (Formule des probabilités totales) : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins :



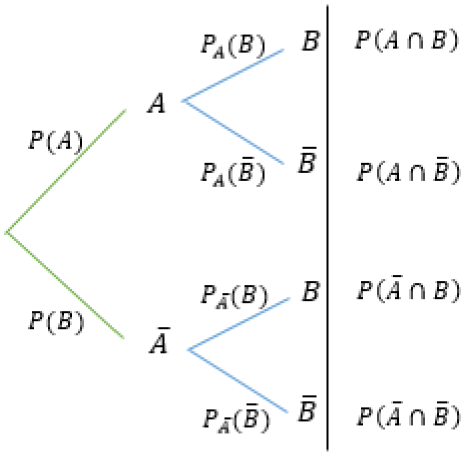
$$P(B) = \ P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

2 – Probabilité conditionnelle

<u>Définition 1</u> : On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, et on note $P_A(B)$, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

<u>Exemple 2</u> (Suite) : Dans cet exemple, $P_A(B)$ désigne la probabilité que la personne interrogé consomme du tabac sachant qu'elle consomme de l'alcool. On a donc $P_A(B) = 0.43$

<u>Remarque</u> : Sur un arbre pondéré $P_A(B)$ se place sur la branche de A vers B



La lecture de l'arbre précédent, nous permet d'obtenir la formule : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

On a donc la propriété suivante :

<u>Propriété 3</u> : On considère deux évènements A et B. On a la formule suivante :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

<u>Exemple 2</u> (Suite) : On interroge un fumeur, quelle est la probabilité qu'il boive de l'alcool ?

On cherche la probabilité d'interroger une personne qui consomme de l'alcool sachant qu'elle consomme du tabac c'est à dire $P_B(A)$ *:* $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.34}{0.37} \approx 0.92$. *Donc la probabilité est d'environ* 92%.

Probabilités – Fiche d'exercices

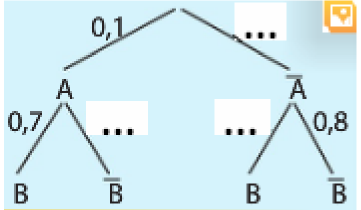
Ex 1 Dans une PME, on s'intéresse à la répartition des salariés suivant leur catégorie (employé, cadre ou intérimaire) et le salaire (1800€ et plus, ou moins de 1800€). On a répertorié les effectifs connus dans le tableau suivant :

	A : 1 800 € et plus	S : moins de 1 800 €	total
B : employé	78		114
C : cadre		6	21
I : intérimaire		3	15
total	105	45	150

1) a. Compléter le tableau avec les effectifs manquants.
   b. Interpréter par une phrase la valeur dans la cellule à l'intersection de la colonne A et de la ligne B.
2) On choisit au hasard la fiche de paye d'un des salariés de cette PME. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « La fiche est celle d'un salarié gagnant 1800€ ou plus »
   B : « La fiche est celle d'un employé »
   E : « La fiche est celle d'un employé gagnant 1800 € ou plus »
   F : « La fiche est celle d'un salarié gagnant 1800 € ou plus ou celle d'un employé »
3) a. Quel est le lien entre les évènements A et S.
   b. Faire le lien entre les probabilités $P(A)$ et $P(S)$.
4) On considère l'évènement C : « La fiche est celle d'un cadre »
   a. Exprimer l'évènement $A \cap C$ à l'aide d'une phrase, puis calculer $P(A \cap C)$.
   b. Exprimer l'évènement $A \cup C$ à l'aide d'une phrase, puis calculer $P(A \cup C)$.
5) On a regroupé dans un dossier toutes les fiches des salariés gagnant 1800€ ou plus. On choisit une fiche au hasard dans ce dossier.
   Calculer la probabilité $P_A(B)$ de choisir la fiche d'un employé.

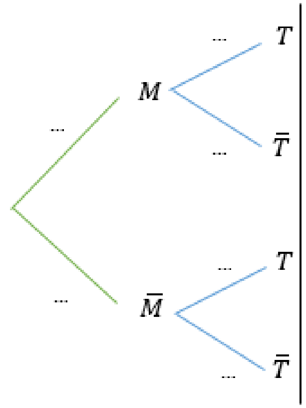
Ex 2 Lors d'un référendum on a sondé les électeurs. On s'intéresse aux deux évènements A: « La personne est une fille » et B: « La personne a répondu OUI ». On a calculé $P(A) = 0.45$; $P(B) = 0.54$. et $P(A \cap B) = 0.12$. Calculer $P(A \cup B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$ et interpréter ces résultats à l'aide d'une phrase.

Ex 3 On considère l'arbre suivant :



1) Compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
2) Lire $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(B)$, $P_A(\bar{B})$.
3) Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$
4) En déduire $P(B)$
5) Calculer $P_B(A)$
6) Calculer $P(A \cup B)$

Ex 4 Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
• Sachant qu'un animal est porteur, le test est positif dans 85 % des cas.
• sachant qu'un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On considère les événements :
M : « Être porteur de la maladie »
T : « Avoir un test positif ».
1) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
3) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
4) Le test est-il fiable ?

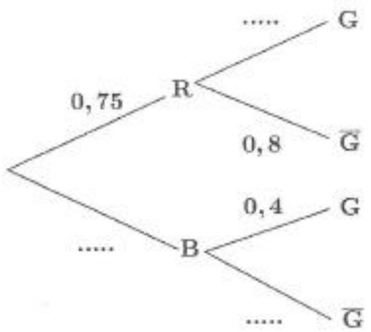
Ex 5 QCM (Tiré du bac Pondichery 2015)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chacune des quatre questions, **une seule des quatre réponses proposées est correcte**. *Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.*

Une urne contient 15 jetons rouges et 5 jetons bleus. 20 % des jetons rouges sont gagnants et 40 % des jetons bleus sont gagnants. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne. On note :

- R l'événement : « Le jeton est rouge. »
- B l'événement : « Le jeton est bleu. »
- G l'événement : « Le jeton est gagnant. »

La situation peut être modélisée par l'arbre de probabilité ci-dessous :



1) La probabilité que le jeton soit bleu est :

- 0,75
- 0,25
- 0,4
- 0,6

2) $p(R \cap G) =$

- 0,05
- 0,45
- 0,15
- 0,95

3) La probabilité que le jeton soit gagnant est :

- 0,2
- 0,6
- 0,25
- 0,75

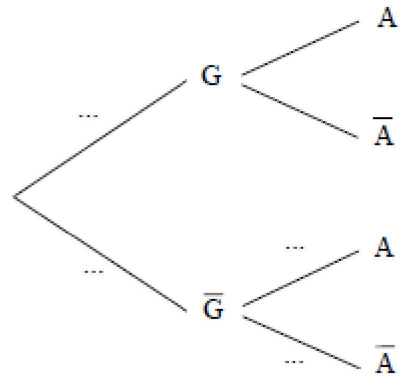
Ex 6 Fête locale (Tiré du bac Polynésie 2014)

Dans un petit village, la mairie a organisé une fête locale : un certain nombre d'entrées gratuites ont été distribuées aux habitants et des stands ont été installés pour la vente de produits locaux.
Les organisateurs estiment que 40% des visiteurs de la fête ont eu une entrée gratuite, les autres ont payé leur entrée.
De plus, parmi les visiteurs ayant une entrée gratuite, 45% ont effectué un achat dans un des stands.
Parmi ceux ayant payé leur entrée, 60% n'ont rien acheté.

On interroge au hasard un des visiteurs de la fête à la fin de la journée.
On note G l'événement : « le visiteur a eu une entrée gratuite », A l'événement : « le visiteur a effectué un achat ».
On notera $\overline{G}$ l'événement contraire de G et $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

1. Donner la valeur de la probabilité $P_G(A)$.

2. Recopier et compléter sur votre copie l'arbre de probabilité ci-dessous



3. Calculer la probabilité de l'événement suivant : « le visiteur a payé son entrée et a effectué un achat ».

4. Montrer que la probabilité que le visiteur ait effectué un achat est 0,42.

5. Calculer la probabilité que le visiteur ait payé son entrée sachant qu'il a effectué un achat.
On arrondira à 0,01 près le résultat.

Ex 7 500^e^ anniversaire (Tiré du bac Centre Etranger 2018)

À l'issue de la célébration du 500ᵉ anniversaire de sa ville, le directeur de l'office du tourisme a commandé une enquête visant à estimer les retombées économiques de cette manifestation. Cette enquête a été réalisée auprès de personnes s'y étant rendues. Il en ressort que :

- 15 % des personnes interrogées ont entre 18 et 25 ans ;
- 40 % des personnes interrogées ont entre 26 et 45 ans ;
- 45 % des personnes interrogées ont 46 ans ou plus.

Il a été demandé aux personnes interrogées si elles s'étaient rendues au restaurant lors de cette manifestation. Les réponses sont synthétisées ci-dessous :

- parmi les 18-25 ans, 28 % se sont rendus au restaurant ;
- parmi les 26-45 ans, 42 % se sont rendus au restaurant ;
- parmi les personnes de 46 ans ou plus, 63 % se sont rendues au restaurant.

Ce questionnaire a permis de remplir une fiche par personne interrogée, précisant son âge et indiquant si elle s'est rendue ou non au restaurant.
On choisit de façon équiprobable l'une de ces fiches.
On définit les événements suivants :

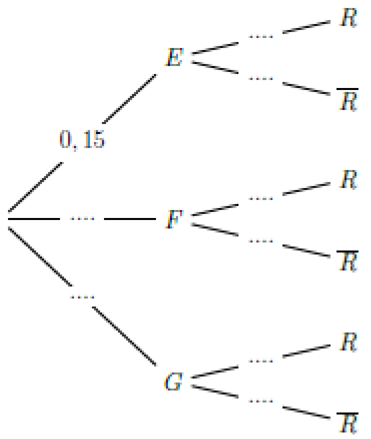
E : « la fiche est celle d'une personne ayant entre 18 et 25 ans »

F : « la fiche est celle d'une personne ayant entre 26 et 45 ans »

G : « la fiche est celle d'une personne ayant plus de 46 ans »

R : « la fiche est celle d'une personne s'étant rendue au restaurant »

1. Compléter l'arbre pondéré donné **en annexe, à rendre avec la copie**.
2. Définir par une phrase l'événement $F \cap R$. Calculer sa probabilité.
3. Montrer que la probabilité de l'événement R est égale à 0,4935.
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'une personne s'étant rendue au restaurant lors des festivités de 2017, calculer la probabilité que ce soit celle d'une personne ayant plus de 46 ans.



Ex 8 Sondage agence de voyage (Tiré du bac Pondichery 2018)

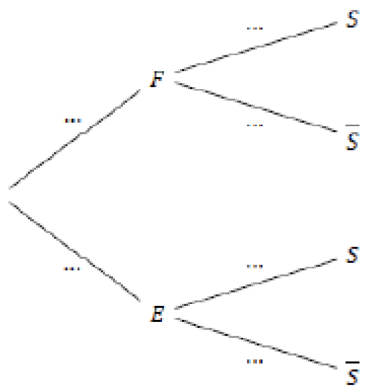
Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la période estivale.
Le sondage est effectué sur l'ensemble des clients. Ce sondage montre que :

- 38 % des clients voyagent en France ;
- 83 % des clients voyageant en France sont satisfaits ;
- 78 % des clients voyageant à l'étranger sont satisfaits.

On interroge un client au hasard. On considère les évènements suivants :

- F : « le client a voyagé en France » ;
- E : « le client a voyagé à l'étranger » ;
- S : « le client est satisfait du voyage ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. Définir par une phrase l'évènement $E \cap S$ et calculer sa probabilité.
3. Montrer que $P(S) = 0,799$.
4. Sachant que le client est satisfait, quelle est la probabilité qu'il ait voyagé à l'étranger ?
   On arrondira pour cette question le résultat au millième.

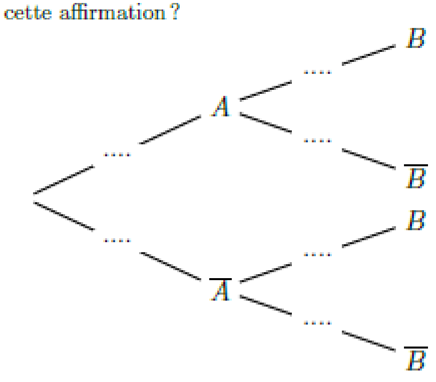
Ex 9 Enseignement supérieur (Tiré du bac Métropole 2018)

Parmi les étudiants de l'enseignement supérieur de France métropolitaine et des DOM, 26 % sont inscrits dans un établissement d'Île-de-France. Parmi ces étudiants inscrits dans un établissement d'Île-de-France, 51 % le sont dans une université.
Parmi les étudiants inscrits en province ou dans les DOM, 62 % sont inscrits dans une université.
Source : Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation.

Dans la base recensant l'INE (Identifiant National Étudiant) de chaque étudiant, on choisit de façon équiprobable un identifiant.
On considère les événements suivants :

A : « l'INE est celui d'un étudiant inscrit dans un établissement d'Île-de-France »
B : « l'INE est celui d'un étudiant inscrit dans une université »

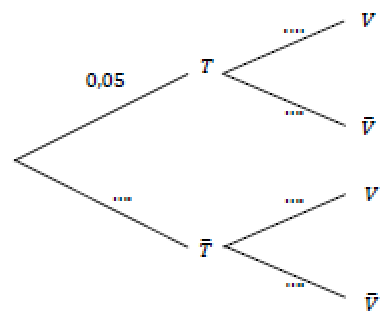
1. Compléter l'arbre de probabilité figurant **en annexe, à rendre avec la copie**, représentant la situation de l'énoncé.
2. Traduire l'événement $A \cap \overline{B}$ par une phrase et calculer sa probabilité.
3. Montrer que la probabilité de l'événement B est égale à $0,5914$.
4. Un responsable du ministère déclare : « Parmi les étudiants inscrits à l'université, moins d'un sur quatre et plus d'un sur cinq sont inscrits dans un établissement d'Île-de-France ».
   Que peut-on penser de cette affirmation ?



Ex 10 Course à la voile (Tiré du bac Antilles - Guyanne 2015)

Albert est un marin participant à une course à la voile en solitaire. Son bateau est très rapide, mais fragile en cas de tempête.
Les prévisions météo permettent d'estimer que, durant la course, la probabilité qu'une tempête survienne est égale à 0,05.
En cas de tempête, on estime que la probabilité qu'Albert soit vainqueur de la course est de 0,02.
En revanche, si aucune tempête ne survient, la probabilité de victoire d'Albert est de 0,8.
Pour tout événement E, on note $\overline{E}$ l'événement contraire de E.
On considère les événements :
T : « une tempête survient pendant la course »
V : « Albert est vainqueur de la course ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, reproduire et compléter l'arbre ci-dessous :



2. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Une tempête survient et Albert est vainqueur de la course » ?
3. Montrer que la probabilité qu'Albert remporte la course est égale à 0,761.
4. Calculer la probabilité qu'une tempête soit survenue sachant qu'Albert a gagné la course.
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-4}.