Chapitre G2 : Produit scalaire & Trigonométrie

1 – Produit scalaire

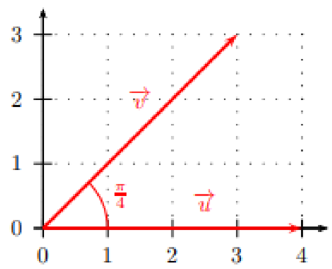
Définition 1 : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le nombre réel définie par $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

Remarque :

- $||\vec{u}||$ est appelée la **norme** de $\vec{u}$: C'est la longueur du vecteur $\vec{u}$. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.
- L'opération $\vec{u}.\vec{v}$ est appelée « produit scalaire » car on multiplie deux vecteurs pour obtenir un nombre.
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si et seulement si l'un des 2 vecteurs est nul ou bien si $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc si $(\vec{u};\vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}$ $(90°)$

  On dit dans ce cas que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux.**

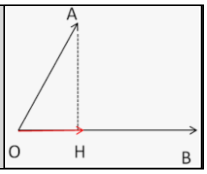
Exemple 1 : Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$



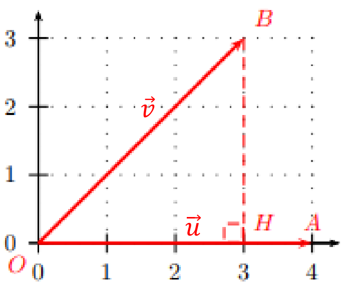
- $||\vec{u}|| = 4$
- $||\vec{v}|| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$
- $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = 4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$

Propriété 1 : Soit A, B deux points du plan et H le **projeté orthogonal** de B sur (OA).

On a alors : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont dans le } \textbf{même sens}. \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont dans le } \textbf{sens contraire}. \end{cases}$



Exemple 2 : Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

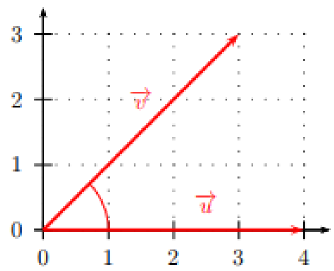


- Soit A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
- Soit H le projeté orthogonal de B sur A.
- $OA = 4$ et $OH = 3$ et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont dans le même sens
- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OH = 12$

Propriété 2 : On considère deux vecteurs du plan de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

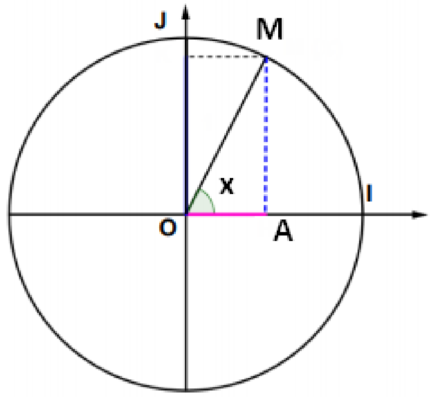
Exemple 3 : Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$



- On a $\vec{u}\binom{3}{3}$ et $\vec{v}\binom{4}{0}$
- $\vec{u}.\vec{v} = 3 \times 4 + 3 \times 0 = 12$

2 – Trigonométrie

Activité 1 : On considère un angle x quelconque en radian et M son image sur le cercle trigonométrique.



1) Quels sont les mesures du triangle OAM ?

   $OA = cos(x)$; $OB = \sin(x)$; $OM = 1$

2) Quelle est la nature de ce triangle ?

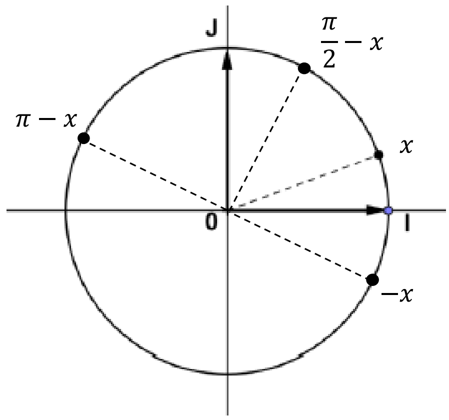
   OAM est rectangle en A

3) Quelle égalité obtient-on ?

   D'après le théorème de Pythagore on a : $OA^2 + OB^2 = OM^2$

   C'est-à-dire $\cos^2(x) + sin^2(x) = 1$ (1)

Activité 2 : On considère un angle x quelconque en radian placé sur le cercle trigonométrique.



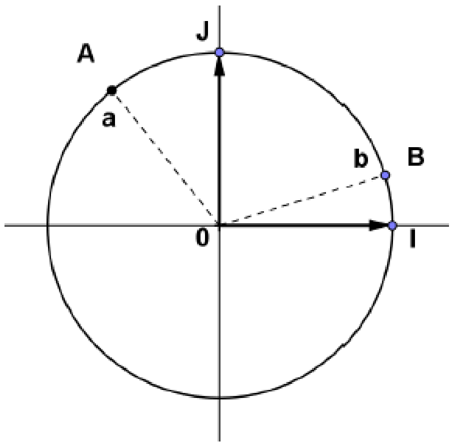
1) Placer sur le cercle trigonométrique les angles :

$$-x \, ; \pi - x \, ; \frac{\pi}{2} - x$$

2) Compléter les égalités suivantes :

   - $\cos(-x) = \cos(x)$ (2)
   - $\sin(-x) = -sin(x)$ (3)
   - $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ (4)
   - $\sin(\pi - x) = sin(x)$ (5)
   - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = si\,n(x)$ (6)
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x)$ (7)

Activité 3 : On considère deux angles a et b quelconques en radian et A et B leurs images sur le cercle trigonométrique.



1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ de deux façons différentes :

   a. En utilisant l'angle $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$

   $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = a - b$

   $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \times cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$

   $= 1 \times 1 \times \cos(a - b)$

   b. En utilisant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

   $\overrightarrow{OA}\binom{\cos a}{\sin a}$ et $\overrightarrow{OB}\binom{\cos b}{\sin b}$

   $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

2) Quelle égalité obtient-on ?

   $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

a. Formule d'addition

Propriété 3 : Pour tous nombres réels a et b, on a les formules suivantes

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (8)$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (9)$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (10)$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (11)$

Démonstration : On considère deux nombres réels a et b.

- On a montré $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ dans l'activité 3
- $\cos(a+b) = \cos(a-b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$

  $= \cos a \cos(b) - \sin a \sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\mathrm{a}+\mathrm{b})) = \cos(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a} - \mathrm{b}) = \cos((\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}) - \mathrm{b})$

  $= \cos(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}) \cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}) \sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a\ \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$

$\cos(-b) = \cos(b)$

$\sin(-b) = -\sin(b)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$

Exemple 4 : En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut donner des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

- $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} += \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b. Formule de duplication

Propriété 4 : Pour tout nombre réel a, on a les formules suivantes

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1 \quad (12)$
- $\sin(2a) = 2\cos a \sin a \quad (13)$

Démonstration : Soit a un nombre réel.

- $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a\ \cos a + \sin a \sin a = \cos^2(a) - sin^2(a)$

  Or $cos^2(a) + sin^2(a) = 1$ donc $sin^2(a) = 1 - cos^2(a)$

  D'où $\cos(2a) = cos^2(a) - \left(1 - cos^2(a)\right) = 2cos^2(a) - 1$
- $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\cos a \sin a$

Exemple 5 : En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, on peut donner des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

- $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\,cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \quad cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$

$\Leftrightarrow \quad cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

- $\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}\right)^2 - sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4} - sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \quad sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow \quad sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c. Formule de linéarisation

Propriété 5 : Pour tout nombre réel a, on a les formules suivantes :

• $\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)-1}{2}$ (14)

• $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$ (15)

Démonstration : Soit a un nombre réel.

• $\cos(2a) = 2cos^2(a) - 1 \Leftrightarrow 2cos^2(a) = \cos(2a) + 1 \Leftrightarrow \cos^2(a) = \frac{\cos(2a)-1}{2}$

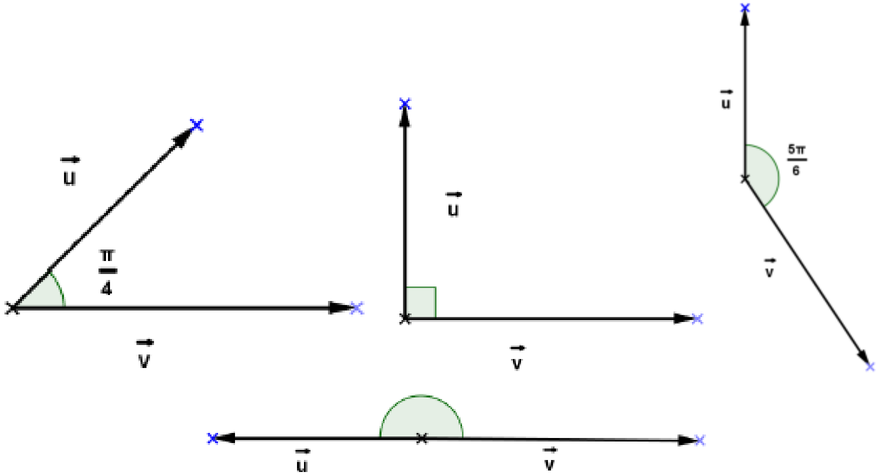
• $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - \frac{\cos(2a)-1}{2} = \frac{2-(\cos(2a)-1)}{2} = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Exemple 6 : Linéariser l'expression $4\, sin^2(3x)$

$$4\, sin^2(3x) = 4 \times \frac{1-\cos(2\times 3x)}{2} = 2(1-\cos(6x)) = 2 - 2\cos(6x)$$

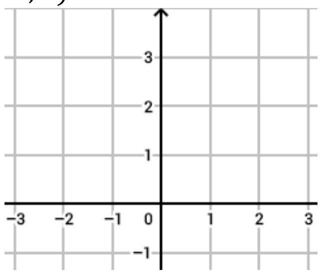
Produit scalaire – Fiche d'exercices

Ex 1 Dans chacun des cas suivants calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ sachant que : $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 4$



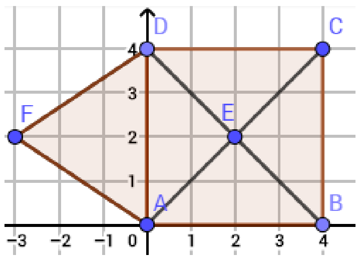
Ex 2 On considère les points $A(2,1), B(-1;3)$ et $C(-2;0)$

1) Placer les points A, B et C.
2) Calculer les distances AB et AC
3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
5) En déduire une valeur approchée de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$



Ex 3 On considère la figure suivante

1) Calculer les produits scalaires suivants :
   a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
   b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$
   c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
   d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}$
   e. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ED}$
2) L'angle $\widehat{DEF}$ est-il un angle droit ?



Ex 4 A l'aide des formules d'addition, montrer les identités suivantes

a. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
b. $\sin(\pi + x) = -sin(x)$
c. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
d. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x)$

Ex 5 Ecrire les expressions suivantes en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

a. $\cos(x + \frac{\pi}{4})$
b. $\cos(x - \frac{\pi}{4})$
c. $\sin(x + \frac{3\pi}{4})$
d. $\sin(x - \frac{\pi}{6})$
e. $\cos(\frac{\pi}{3} - x)$
f. $\sin(x + \frac{5\pi}{6})$

Ex 6 **(Valeurs exactes des cosinus et sinus des multiples de $\frac{\pi}{12}$)**

1) A l'aide des formules de linéarisation, en remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$
   Déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
2) A l'aide des formules d'addition, en remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$
   Déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
3) A l'aide des formules d'addition, en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
   Déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
4) Compléter le tableau suivant en utilisant des valeurs exactes :

x	$\frac{1\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}$
$\cos(x)$												
$\sin(x)$												