

Polynômes du second degré - Activités

Activité 1 : Trajectoire d'un poids

Valerie Adams, championne au lancer de poids aux Jeux Olympiques 2012 effectue un lancer.

La trajectoire suivie par le poids est modélisé par une partie de la courbe de la fonction

$$h(x) = -0.05x^2 + 0.9x + 2 \text{ avec } x \geq 0$$

Le repère choisi est orthonormée : L'axe des abscisses représente le sol et l'axe des ordonnées la position initiale de l'athlète. Toutes les unités sont en mètres.

- 1) A quelle hauteur l'athlète a-t-elle lâché le poids ?
- 2) a. Tracer la courbe de sur votre calculatrice en utilisant la réglage suivant pour la fenêtre d'affichage.

Réglage de la fenêtre : $0 \leq X \leq 30$ et $-10 \leq Y \leq 10$.

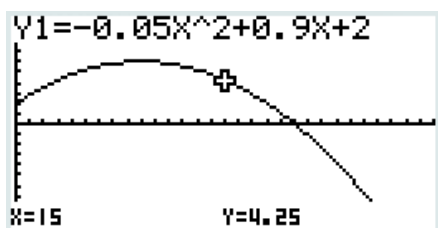


Figure 1 : Vue de l'écran de la calculatrice

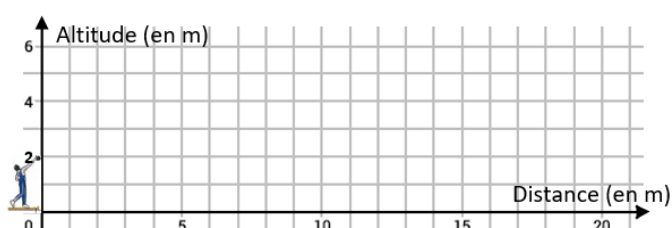


Figure 2 : Tracé de la trajectoire prise par le poids

- b. Comment appelle-t-on la courbe obtenue ?
- 3) Utiliser la fonction TRACE pour estimer :
 - a. La hauteur maximale atteinte par le poids
 - b. La longueur du lancer
- 4) a. Vérifier que pour tout nombre réel x , on a $h(x) = 6,05 - 0.05(x - 9)^2$
 b. Pour tout nombre réel x , indiquer le signe de $(x - 9)^2$ puis celui de $-0.05(x - 9)^2$.
 c. En déduire que la hauteur maximale atteinte par le poids est 6.05 m
 d. A l'aide d'un tableau de variation représenter l'évolution de la trajectoire du poids.
- 5) On a utilisé un logiciel de calcul formel pour factoriser l'expression h .
 Démontrer que la longueur du lancer est exactement 20 m .
- 6) Tracer la trajectoire prise par le poids en faisant apparaître tous les points importants.

Calcul formel

$-0.05x^2 + 0.9x + 2$

1

Factoriser: $\frac{1}{20} (-x - 2) (x - 20)$

Activité 2 : A l'aide du logiciel Geogebra, créer trois curseurs « nombres » a , b et c , variant entre -5 et 5 , par pas de 0.1 , puis tracer la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. Faire varier les coefficients a , b et c puis compléter le tableau suivant :

Effet sur la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$	Coefficient
Le signe de ce coefficient oriente la parabole « vers le haut » ou « vers le bas ».	
La variation de ce coefficient déplace la parabole dans le sens vertical	
La variation de ce coefficient déplace la parabole horizontalement et verticalement	
La variation de ce coefficient change la « forme » de la parabole	
Ce coefficient correspond à la valeur en laquelle la courbe coupe l'axe des ordonnées.	



Polynômes du second degré - Cours

1 – Définition & Courbe représentative

Définition 1 : Soit a , b et c trois nombres réels tel que $a \neq 0$. On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur \mathbb{R} de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple 1 : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ est un polynôme du second degré.

Ses coefficients sont $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$

Exemple 2 : La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -2x^2 + 4x + 3$ est un polynôme du second degré.

Ses coefficients sont $a = -2$, $b = 4$ et $c = 3$

Remarque :

- La fonction carré est un polynôme du second degré avec les coefficients $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.
- Les fonctions affines ne sont pas des polynôme du second degré (car sinon $a = 0$).

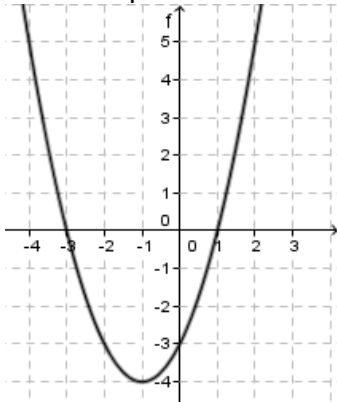
Propriété 1 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

- La courbe représentative de f est une **parabole**.
- Si $a > 0$ alors la parabole est orientée vers le **haut** et si $a < 0$ alors elle est orientée vers le **bas**.
- Le **sommet** S de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha, \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$
- La parabole est **symétrique** par rapport à l'axe vertical $x = \alpha$
- La parabole coupe l'axe des ordonnées en c

Remarque : f peut s'écrire sous **forme canonique** : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Exemple 3 : $f(x) = x^2 + 2x - 3$

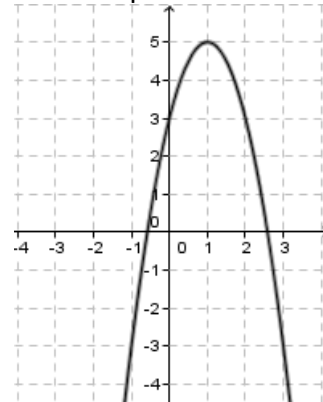
- Courbe représentative de f .



- $a > 0 \rightarrow$ Orientation : « Vers le haut »
- $\alpha = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$
- $\beta = f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = -4$
- Sommet : $S(-1; -4)$
- Axe de symétrie : $x = -1$
- Forme canonique : $f(x) = (x + 1)^2 - 4$

$g(x) = -2x^2 + 4x + 3$

- Courbe représentative de g .



- $a < 0 \rightarrow$ Orientation : « Vers le bas »
- $\alpha = -\frac{4}{2 \times (-2)} = 1$
- $\beta = f(1) = -2 \times 1^2 + 4 \times 1 + 3 = 5$
- Sommet : $S(1; 5)$
- Axe de symétrie : $x = 1$
- Forme canonique : $f(x) = -2(x - 1)^2 + 5$



2 – Sens de variation & Extremums

Propriété 2 : Les variations du polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont données par les tableaux suivants :

• Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

f admet un **minimum** en α qui vaut β

• Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

f admet un **maximum** en α qui vaut β

Exemple 4 : Réaliser le tableau de variation puis déterminer les extremums des fonctions suivantes

• $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$a = 1 > 0 ; \alpha = -1 ; \beta = -4$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

f admet un minimum en -1 qui vaut -4

• $g(x) = -2x^2 + 4x + 3$

$a = -2 < 0 ; \alpha = 1 ; \beta = 5$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$			

g admet un maximum en 1 qui vaut 5

3 – Applications : Problèmes d'optimisation

Problème 1 : Une entreprise fabrique un produit et souhaite définir son prix de vente optimal. Après une étude de marché, il s'avère que le bénéfice par an (en K€) de l'entreprise en fonction du prix de vente (en €) du produit peut être représenté par la fonction f définie sur $[0,10]$ par : $f(x) = -20x^2 + 200x - 420$. Quel est le prix de vente optimal ? Quel est le bénéfice correspondant ?

Solution 1 : f est un polynôme du second degré avec $a = -20$, $b = 200$ et $c = -420$

$a < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.

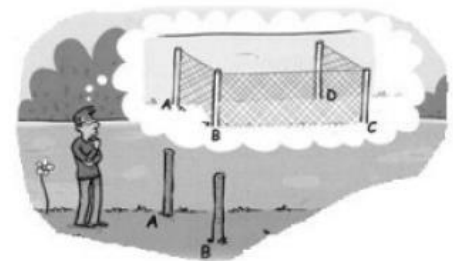
$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2 \times (-20)} = 5$$

$$\beta = f(5) = -20 \times 5^2 + 200 \times 5 - 420 = 80$$

x	0	5	10
$g(x)$	-420	80	-420

Le prix de vente optimal est donc de 5€ et le bénéfice correspondant est de 80 K€

Problème 2 : Un jardinier dispose de 21 m de grillage pour réaliser un enclos rectangulaire pour ses poules. Il compte utiliser le mur du jardin pour former un côté de l'enclos et utiliser le grillage pour former les trois autres côtés. Comment doit-il faire pour construire le plus grand enclos possible ?



Solution 2 : Soit x la largeur de l'enclos et y la longueur de l'enclos. On a $2x + y = 21$ d'où $y = 21 - 2x$.

L'aire de l'enclos est égale à $A = xy$ donc en remplaçant y par sa valeur en fonction de x , on obtient :

$$A(x) = x(21 - 2x) = 21x - 2x^2. \text{ C'est un polynôme du second degré avec } a = -2, b = 21 \text{ et } c = 0$$

On aura un maximum car $a < 0$. $\alpha = \frac{-21}{2 \times (-2)} = 5.25 ; \beta = A(5.25) = -2 \times (5.25)^2 + 21 \times 5.25 = 55.125$

Il faut donc choisir une largeur de $x = 5.25\text{m}$

La longueur sera de $y = 21 - 2 \times 5.25 = 10.5\text{m}$

On aura alors un enclos de 55.125 m^2

x	0	5.25	21
$A(x)$	0	55.125	0



Second degré - Exercices

Polynômes du second degré

1 (Coefficients)

Ces fonctions sont-elles des polynômes du second degré ? Si oui, identifier leurs coefficients :

- $f(x) = -x^2 - 3x + 5$
- $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}x$
- $h(x) = 2 - x^2$
- $i(x) = 2x + 1$
- $j(x) = x^2$
- $k(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
- $l(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 4$

2 (Dix Fonctions)

- Parmi ces dix fonctions, déterminer celles qui sont des polynômes du second degré.
- Pour les fonctions retenues déterminer si elles admettent un minimum ou un maximum.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| • $f_1(x) = 3x + 1$ | • $f_2(x) = 3x^2 + 2x + 5$ |
| • $f_3(x) = (2x - 1)^2$ | • $f_4(x) = (2 - x)(3x + 1)$ |
| • $f_5(x) = -2\sqrt{x}$ | • $f_6(x) = 2x - 1^2$ |
| • $f_7(x) = 25$ | • $f_8(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$ |
| • $f_9(x) = -\frac{x^2}{2} - 5$ | • $f_{10}(x) = \frac{1}{x}$ |

3 (Second degré ?)

Voici les fonctions proposées par deux élèves pour définir un polynôme du second degré.

Rachel : « $f(x) = 3x^2 + 1 - (2x^2 + 3x) - x^2$ ».

Max : « $g(x) = x(x^2 + 2x - 1) - x^3$ ».

Qu'en pensez-vous ?

4 (Tableau de variation)

Réaliser le tableau de variation des fonctions suivantes, puis déterminer leur(s) extremum(s) :

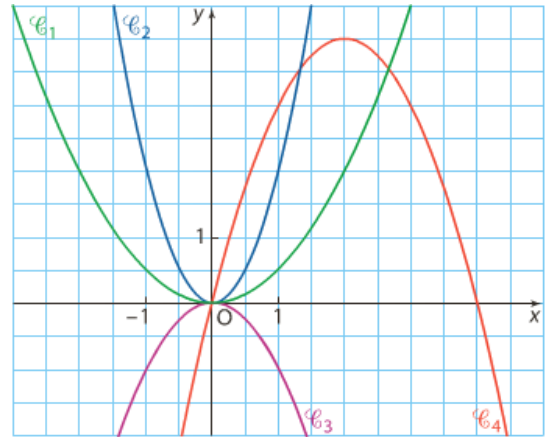
- $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$
- $h(x) = -2(x - 1)^2 + 3$
- $k(x) = 0.5(x + 3)^2 - 1$

5 (Tracer une parabole)

Dans un repère, tracer l'allure de la parabole représentative des polynômes suivants, en faisant apparaître les points importants (Sommet, axe de symétrie, ordonnée à l'origine).

- $f_1(x) = -2x^2 + 4x - 3$
- $f_2(x) = 3x^2 + 3x + 1$
- $f_3(x) = x^2 - 3$
- $f_4(x) = (x - 2)^2 + 1$

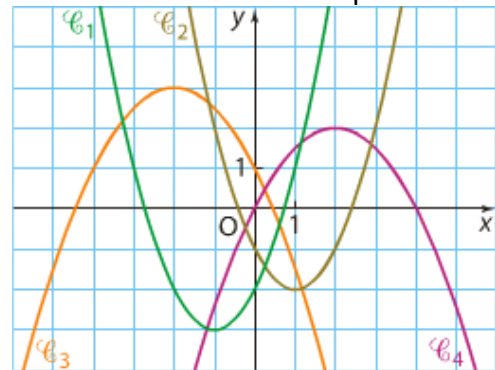
5 (Associer la bonne courbe 1)



- | | |
|--------------------------|------------------------------------|
| $f_1 : x \mapsto -x^2 ;$ | $f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 ;$ |
| $f_3 : x \mapsto 2x^2 ;$ | $f_4 : x \mapsto x(4 - x).$ |

6 (Associer la bonne courbe 2)

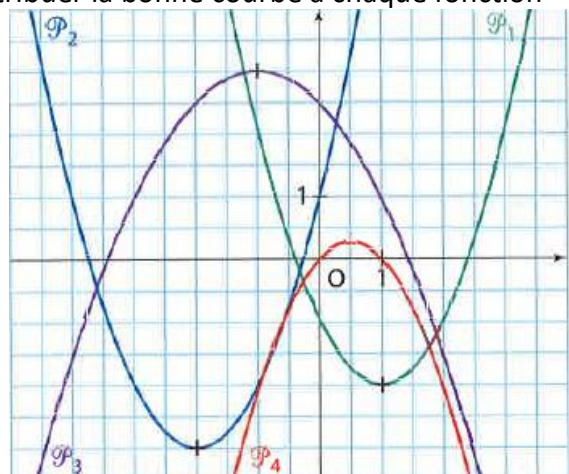
Attribuer la bonne courbe à chaque fonction



- | | |
|-----------------------------------|---|
| $f_1 : x \mapsto x^2 + 2x - 2 ;$ | $f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 ;$ |
| $f_3 : x \mapsto (x - 1)^2 - 2 ;$ | $f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$ |

7 (Associer la bonne courbe 3)

Attribuer la bonne courbe à chaque fonction



- | | |
|--------------------------------------|--------------------------|
| • $f(x) = x^2 + 4x + 1$ | • $g(x) = (x - 1)^2 - 2$ |
| • $h(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 3$ | • $k(x) = -x^2 + x$ |

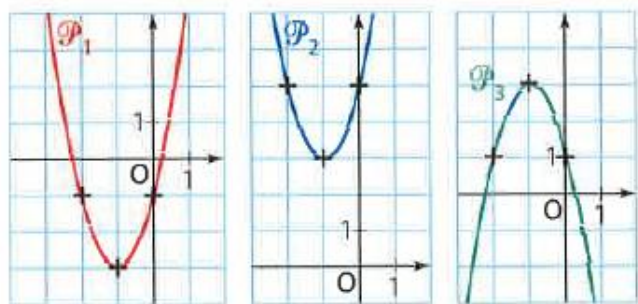


8 (Associer la bonne courbe 4)

Attribuer la bonne courbe à chaque fonction

• $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$ • $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$

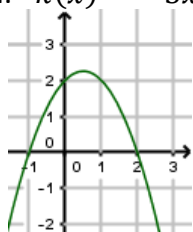
• $h(x) = 2(x+1)^2 + 3$



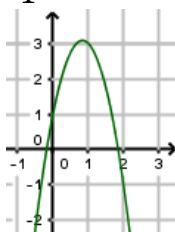
9 (Associer la bonne courbe 5)

Associer à chacune des fonctions suivantes, sa courbe représentative

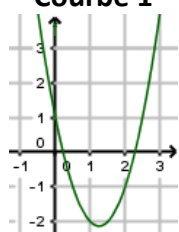
- $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
- $g(x) = -(x+1)(x-2)$
- $h(x) = 2(x-2)^2 - 3$
- $k(x) = -3x^2 + 5x + 1$



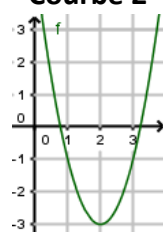
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

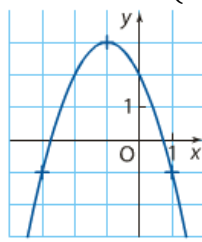
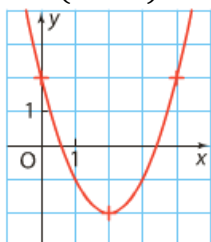


Courbe 4

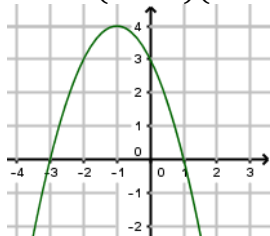
10 (Retrouver l'expression algébrique)

Dans chacun des cas trouver l'expression de $f(x)$ en sachant que la parabole représente une fonction qui s'écrit sous la forme :

a. $x \mapsto (x - a)^2 + m$ b. $x \mapsto M - (x - a)^2$

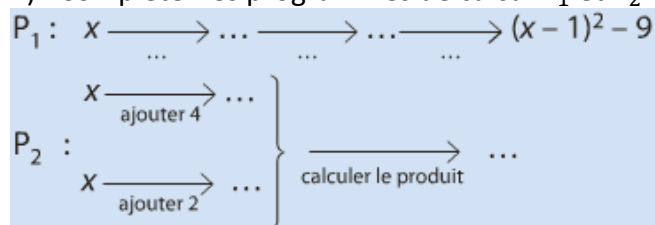


c. $x \mapsto -(x - a)(x - b)$



11 (Programme de Calcul)

1) Compléter les programmes de calcul P_1 et P_2



2) Tester P_1 et P_2 avec les nombres -2 et 1 . Modifier ces programmes pour qu'ils affichent, pour tout nombre x , le même résultat.

12 (Choisir la bonne forme 1)

On considère f un polynôme du second degré dont les trois formes sont données ci-dessous.

Forme développée : $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$

Forme canonique : $f(x) = 0,5(x-3)^2 - 0,5$

Forme factorisée : $0,5(x-2)(x-4)$

- Montrer que les 3 formes correspondent à la même fonction.
- Choisir la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
 - Quelle est l'orientation de la parabole ?
 - Quels est le point d'intersection entre la parabole et l'axe des ordonnées ?
 - Quels sont le(s) point(s) d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses ?
 - Quels sont les coordonnées du sommet S de la parabole ?
 - Réaliser le tableau de variation de f .
 - Réaliser le tableau de signe de f .
 - Trouver l'extremum de f .
- Dans un repère, tracer la parabole représentative de f en faisant apparaître les points importants.

13 (Choisir la bonne forme 2)

On considère f un polynôme du second degré dont les trois formes sont données ci-dessous.

Forme développée : $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$

Forme canonique : $f(x) = 2(x+2)^2 - 27$

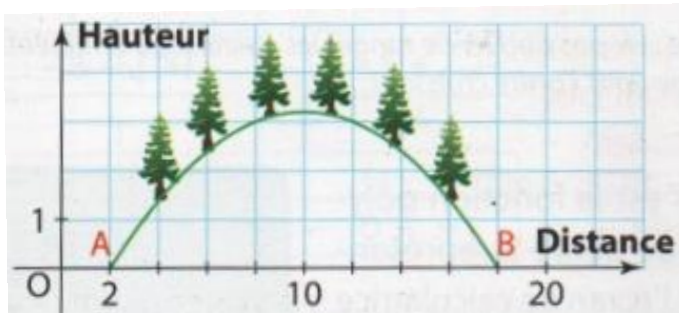
Forme factorisée : $3(x-1)(x+5)$

- En choisissant la forme la plus appropriée, déterminer :
 - L'image de 0.
 - Le(s) antécédent(s) de 0.
 - Le(s) antécédent(s) de -15 .
 - Le(s) antécédent(s) de -27 .
 - Le(s) antécédent(s) de -30 .
- En quel point la parabole représentative de la fonction f coupe-t-elle :
 - L'axe des abscisses.
 - L'axe des ordonnées.



14 (Montagne)

On a modélisé la silhouette d'une montagne à l'aide d'une parabole qui est la courbe représentative d'une fonction du second degré. Les unités sont en centaines de mètres.



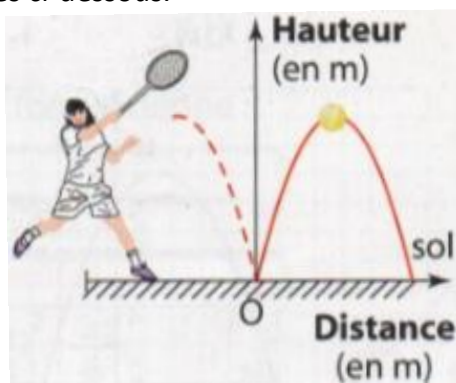
On donne ci-dessous les 3 formes du polynôme.

Forme développée	$f(x) = -0,05x^2 + x - 1,8$
Forme canonique	$f(x) = 3,2 - 0,05(x - 10)^2$
Forme factorisée	$f(x) = -0,05(x - 2)(x - 18)$

- Montrer que les 3 formes correspondent à la même fonction.
- Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
 - Quelle est l'altitude de la montagne ?
 - Quelle est la distance AB ?

15 (Balle de tennis)

Une balle de tennis rebondit en suivant une trajectoire parabolique représentant une fonction f du second degré dont les trois formes sont données ci-dessous.



Forme développée	$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$
Forme canonique	$f(x) = -2(x - 2)^2 + 2$
Forme factorisée	$f(x) = -2(x - 1)(x - 3)$

- Montrer que les 3 formes correspondent à la même fonction.
- Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
 - A quelle hauteur la balle rebondit-elle ?
 - A quelle distance la balle touche le sol ?

Problèmes

16 (Optimisation d'un Bénéfice)

Afin d'orienter au mieux ses investissements, une chaîne d'hôtel réalise une analyse sur le bénéfice par hôtel (en €), noté $B(x)$, en fonction du taux d'occupation des chambres x (en %). Pour tout réel appartenant à l'intervalle $[20; 90]$ on a :

$$B(x) = -x^2 + 160x + c, \text{ où } c \text{ est un réel}$$

- Déterminer c , sachant que pour un taux d'occupation de 40%, le bénéfice est de 900€.
- Etudier les variations de la fonction B , sur l'intervalle $[20; 90]$
- En déduire pour quelle valeur du taux d'occupation le bénéfice est maximum.
- Déterminer ce bénéfice maximum

17 (Optimisation d'un Bénéfice 2)

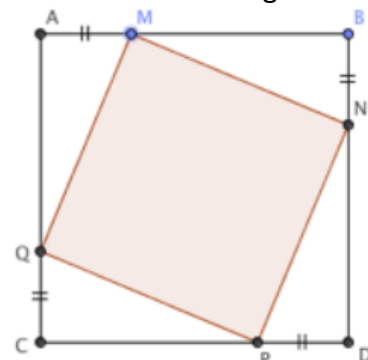
Un artisan bijoutier débutant estime que son bénéfice dépend du nombre de pièces x qu'il produit en un mois, selon la fonction B définie pour x positif ou nul par :

$$B(x) = -50x^2 + 1000x - 3750$$

- Montrer que B peut s'écrire sous la forme $B(x) = -50(x - 5)(x - 15)$
 - Réaliser le tableau de signe de la fonction B
 - Pour combien de pièces produites l'artisan obtient-il un bénéfice positif ?
- Dresser le tableau de variation de B .
 - Déterminer le bénéfice maximal de l'artisan.

18 (Aire minimale)

Soit $ABCD$ un carré de côté 4 cm. On a placé un point M mobile sur $[AB]$ et construit le carré $MNPQ$ comme visualisé sur la figure ci-dessous.

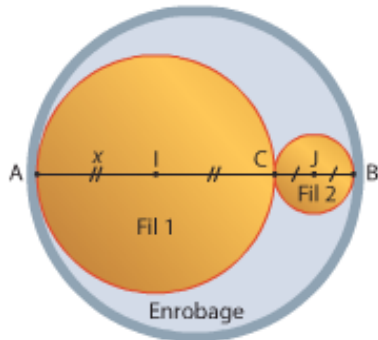


- La longueur du segment $[AM]$ modifie-t-elle l'aire du carré $MNPQ$?
- Pour quelle(s) valeur(s) de AM , l'aire de $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 ?
- Déterminer l'aire de $MNPQ$ lorsque AM est égale à 0,5 cm.
- Trouver la ou les valeurs de AM pour que l'aire de $MNPQ$ soit minimale.



19 (Fils)

Deux fils sont enrobés dans une gaine de diamètre intérieur $AB = 20 \text{ mm}$.

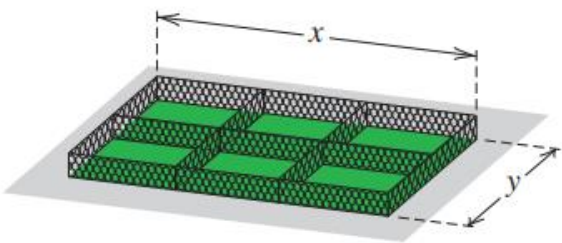


On $x = AC$ (en mm) le diamètre du premier fil.

- 1) Exprimer, en fonction de x , le rayon BC du deuxième fil.
- 2) Exprimer en fonction de x et de π l'aire totale des sections des deux fils.
- 3) Déterminer pour quel diamètre de fils, l'aire occupée par la section des deux fils est minimale ?
- 4) Quel est alors le pourcentage de l'aire de la section de la gaine occupé par la section des deux fils ?
- 5) Peut-on rajouter dans la gaine un troisième fil de diamètre 6 mm ?

20 (Grillage)

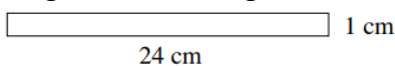
On dispose de 1200 mètres de grillage pour construire six cages à animaux, comme le montre la figure ci-dessous.



- 1) Déterminer les dimensions qui donnent une aire clôturée maximale.
- 2) Que vaut alors cette aire ?

21 (Photographe)

Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de 24 cm de long et 1 cm de large.



Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?

22 Un joueur située à 25 m du but tente un tir et parvient à marquer. Son ballon a franchi la ligne de but à 2,20 m passant ainsi tout près de la barre transversale, puis à ensuite atteint le sol 1 m derrière la ligne de but. La trajectoire du ballon suit une parabole du second degré. Quelle est la hauteur maximale du ballon ?

