Chapitre 9 : Suites arithmétiques & géométriques

1 – Suites arithmétiques

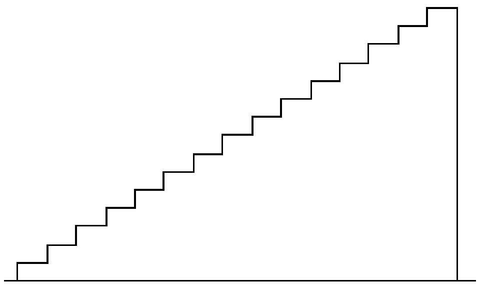
a. Généralités

Activité 1 : (Escalier)

Bob monte un escalier de 15 marches de la façon suivante :

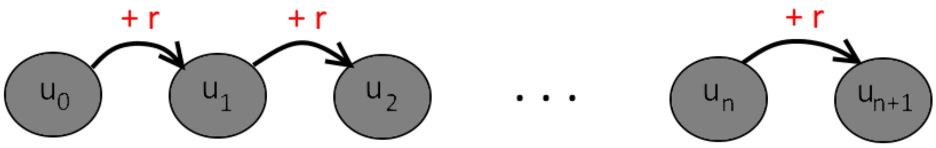
Il part de la 2ème marche et monte les marches de 3 en 3.

On note p_n sa position dans l'escalier au bout du $n^{ème}$ pas.



1) Ecrire la suite (p_n)
2) Quelle est la relation entre un terme et le terme suivant ?
3) Au bout de combien de pas aura-t-il monté l'escalier ?
4) Reprendre les trois questions précédentes en partant de la dernière marche et en descendant de 5 en 5

Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** r si pour tout rang n, on a $u_{n+1} = u_n + r$



Exemple 1 :

● Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

Pour tout rang n on a $u_{n+1} = u_n + 2$. On a donc $(u_n) = (1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$

● Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $r = -3$.

Pour tout rang n on a $v_{n+1} = v_n - 3$. On a donc $(v_n) = (10; 7; 4; 1; -2; -5; \dots)$

Exemple 2 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4n + 5$.

Pour tout rang n on a $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 5 - (4n+5) = 4n + 4 + 5 - 4n - 5 = 4$

Donc, pour tout rang n on a $u_{n+1} = u_n + 4$.

En conclusion la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 4\times 0 + 5 = 5$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

On a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$

On a donc $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 3$

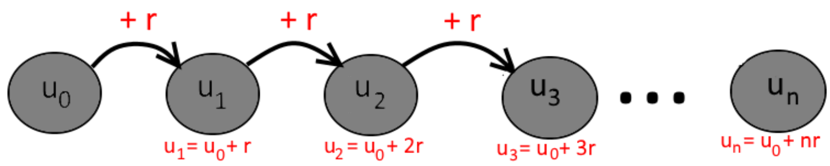
La différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante. La suite n'est donc pas arithmétique

b. Expression de u_n fonction de n

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout rang n, on a $u_n = u_0 + nr$

Démonstration : Si (u_n) est arithmétique de raison r alors pour tout rang n, on a $u_{n+1} = u_n + r$. On a donc :

$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$
...
$u_n = u_0 + nr$



Exemple 4 :

- Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

  Pour tout rang n, on a $u_n = 1 + n\times 2 = 2n + 1$

- Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $r = -3$.

  Pour tout rang n on a $v_n = 10 + n\times(-3) = -3n + 10$

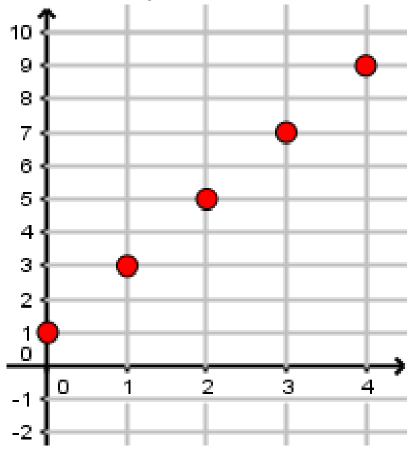
c. Sens de variation & Représentation graphique

Propriété 2 : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r.

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante

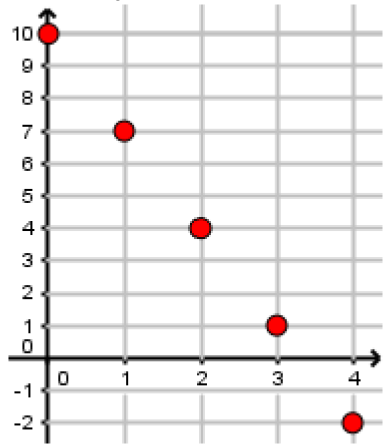
Exemple 5 :

- $u_0 = 1$; $r = 2$



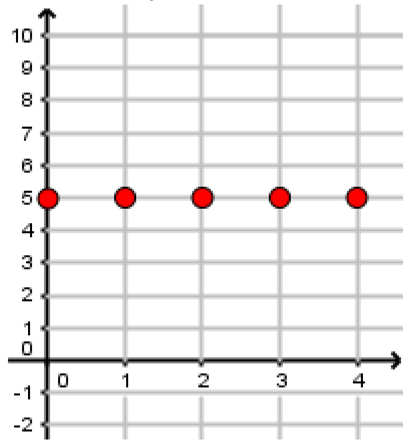
(u_n) est croissante

- $v_0 = 10$; $r = -3$



(v_n) est décroissante

- $w_0 = 5$; $r = 0$



(w_n) est constante

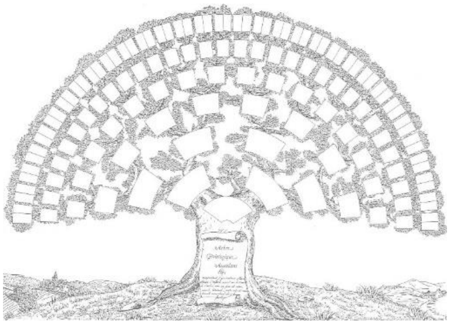
Propriété 2 : Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont **alignés.**

Remarque : On utilise les suites arithmétiques pour modéliser des situations où l'évolution est **linéaire.**

$\boxed{2}$ – **Suites géométriques**

a. Généralités

Activité 2 : (Arbre généalogique)



1) Combien un être humain a-t-il de parents ? de grand-parents ? d'arrière-grands-parents ? d'arrière-arrière-grands-parents ?
2) On note p_n le nombre de parents du $n^{\text{ème}}$ degré.
   Ecrire la suite (p_n)
3) Quelle est la relation entre un terme et le terme suivant ?
4) Combien de membre comporte votre généalogie de vous à vos arrière-arrière-arrière-grands-parents

Définition 2 : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** q si pour tout rang n, on a $u_{n+1} = q \times u_n$

Exemple 6 :

● Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

Pour tout rang n on a $u_{n+1} = 3 \times u_n$ On a donc $(u_n) = (1; 3; 9; 27; 81; 243; \dots)$

● Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Pour tout rang n on a $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$. On a donc $(v_n) = (2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots)$

Exemple 7 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.

Pour tout rang n on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2}{2^n} = 2$

Donc, pour tout rang n on a $u_{n+1} = 2 \times u_n$.

En conclusion la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 2^0 = 1$

Exemple 8 : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

On a $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 9$

On a donc $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{1} = 4$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4} = 2.25$

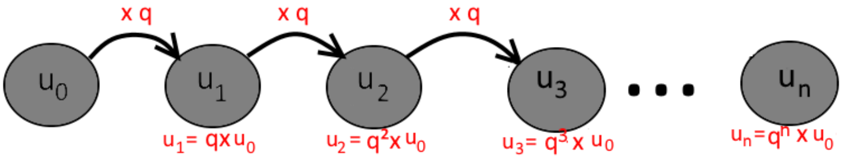
Le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas constant. La suite n'est donc pas géométrique

b. Expression de u_n fonction de n

Propriété 3 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout rang n, on a $u_n = u_0 \times q^n$

Démonstration : Si (u_n) est géométrique de raison q alors pour tout rang n, on a $u_{n+1} = q \times u_n$. On a donc :

$u_1 = q \times u_0$
$u_2 = q \times u_1 = q \times q \times u_0 = q^2 \times u_0$
$u_3 = q \times u_2 = q \times q^2 \times u_0 = q^3 \times u_0$
...
$u_n = q^n \times u_0$



Exemple 9 :

- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

  Pour tout rang n, on a $u_n = 1 \times 3^n = 3^n$

- Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

  Pour tout rang n on a $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

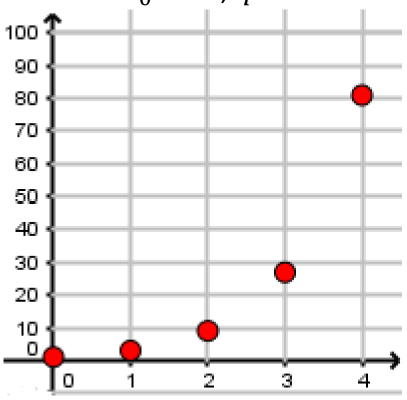
c. Sens de variation & Représentation graphique

Propriété 4 : On considère une suite géométrique (u_n) de raison q **positive.**

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.

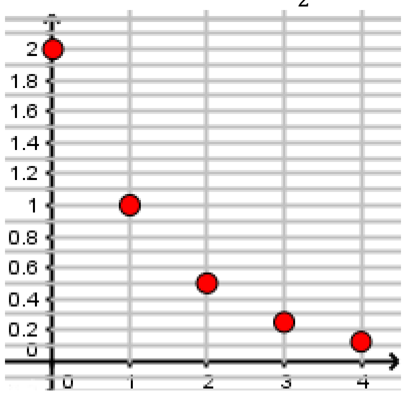
Exemple 10 :

- $u_0 = 1 \,;\, q = 3$



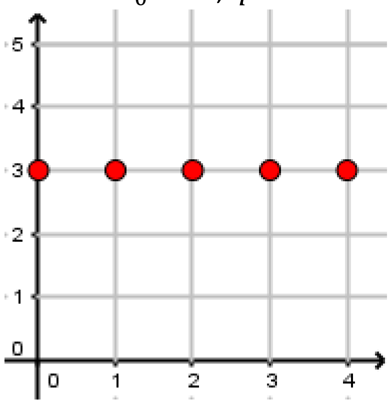
(u_n) est croissante

- $v_0 = 2 \,;\, q = \frac{1}{2}$



(v_n) est décroissante

- $w_0 = 3 \,;\, q = 1$



(w_n) est constante

Remarque : On utilise les suites géométriques pour modéliser des situations où l'évolution est **exponentielle.**

Suites numériques – Exercices

Suites arithmétiques

1 Ecrire les suites arithmétiques suivantes :

a. Premier terme : $u_0 = 0$; Raison : $r = 5$
b. Premier terme : $u_0 = -1$; Raison : $r = 10$
c. Premier terme : $u_0 = 1$; Raison : $r = 0.1$
d. Premier terme : $u_0 = 1$; Raison : $r = -4$

2 Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, déterminer la raison.

a. $(u_n) = (1; 5; 9; 13; 17; 21; \dots)$
b. $(v_n) = (-10; -21; -32; -43\,; -54 \dots)$
c. $(w_n) = (33; 44; 55; 66; 88;)$
d. $(x_n) = (\frac{1}{4}.\frac{2}{4};\frac{3}{4};\frac{4}{4};\frac{5}{4}; \dots)$

3 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = -3$

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2) Calculer u_1, u_2 et u_3
3) Représenter la suite dans un repère.
Que remarque t-on ?
4) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
5) Exprimer u_n en fonction de n
6) En déduire la valeur de u_{150}

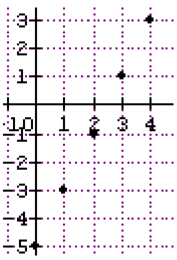
4 Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui déterminer le premier terme et la raison.

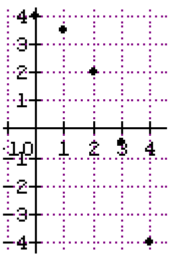
a. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 2 - 5n$
b. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + 5$
c. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = n^3$
d. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{n}{3} + 1$

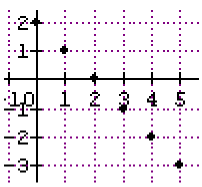
5 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

1) On donne $u_0 = 1$ et $r = 5$. Calculer u_4.
2) On donne $u_4 = 10$ et $r = 2$. Calculer u_0.
3) On donne $u_1 = 6$ et $u_4 = 18$. Calculer r et u_0.

6 Les suites représentés ci-dessous peuvent-elle être arithmétique. Si oui, déterminer le premier terme et la raison éventuelle.


Suite 1


Suite 2


Suite 3

Suites géométriques

7 Ecrire les suites géométriques suivantes :

a. Premier terme : $u_0 = 3$; Raison : $q = 2$
b. Premier terme : $u_0 = 1$; Raison : $q = -1$
c. Premier terme : $u_0 = 10$; Raison : $q = \frac{1}{2}$
d. Premier terme : $u_0 = 4$; Raison : $q = \frac{1}{10}$

8 Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, déterminer la raison.

e. $(u_n) = (5; 10; 20; 40; 80; \dots)$
f. $(v_n) = (-5; -15; -45; -135\,; \dots)$
g. $(w_n) = (2; 22; 222; 2222; 22222 \dots)$
h. $(x_n) = (1; -10; 100; -1000; 10000; \dots)$

9 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2) Calculer u_1, u_2 et u_3
3) Représenter la suite dans un repère.
Que remarque t-on ?
4) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
5) Exprimer u_n en fonction de n
6) En déduire la valeur de u_{150}

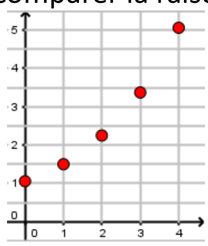
10 Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui déterminer le premier terme et la raison.

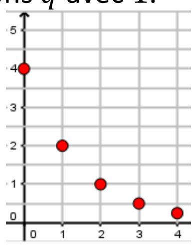
a. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 2 \times 3^n$
b. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_0 = 2$et $u_{n+1} = 3u_n$
c. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \sqrt{n+1}$
d. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \times 3$

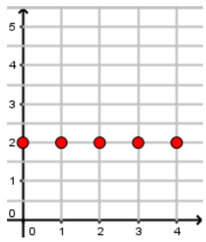
11 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q

1) On donne $u_0 = 1$ et $q = 5$. Calculer u_4.
2) On donne $u_4 = 100$ et $q = 0.5$. Calculer u_0.
3) On donne $u_1 = 4$ et $u_3 = 36$. Calculer q et u_0.

12 Les suites représentés ci-dessous dessous sont géométriques. Dans chacun des cas comparer la raisons q avec 1.


Suite 1


Suite 2


Suite 3

Problèmes

13 Un chauffeur de taxi propose les tarifs suivants : *« Prise en charge 5€ ; Tarif au km 1,50€ »*
On cherche à modéliser le prix de la course en fonction du nombre de kilomètre parcouru.

1) Modéliser cette situation avec une suite arithmétique (u_n)
2) Exprimer (u_n) en fonction de n.
3) Quel est le prix de la course pour 10km parcouru ?
4) Combien peut-on parcourir de kilomètre au maximum avec 50€ ?

14 Jean vient d'être embaucher dans une entreprise. Il débute avec un salaire net de 1500€. Chaque année le patron de l'entreprise augmente tous ses salariés de 2%. On note s_n le salaire de Jean au bout de sa $n^{\text{ème}}$ année de service

1) Déterminer s_0, s_1, s_2 et s_3
2) Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n
3) Quelle est la nature de la suite (s_n) ?
4) Exprimer (s_n) en fonction de n.
5) Quel sera son salaire l'année de sa retraite après 42 années de travail dans l'entreprise ?

15 Dans ce problème nous allons étudier deux types de placements

1) Intérêts simples

Placer un capital à x % par an avec intérêts simples signifie que chaque année on reçoit le même intérêt qui égal à x % du capital.
On place un capital de 10000 € à 5% par an. avec intérêts simples. On note c_n le capital disponible au bout de n années.

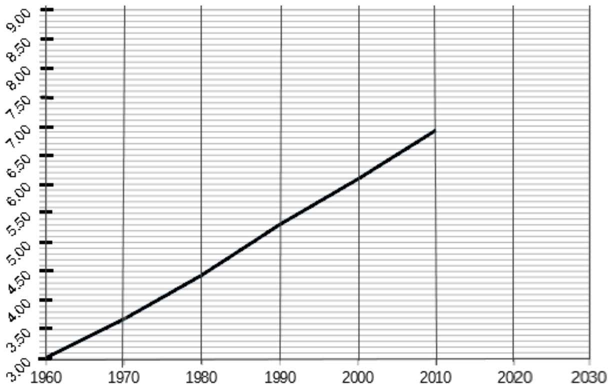
a. Calculer les premiers de la suite (c_n).
b. Quel est la nature de la suite (c_n) ?
c. Combien d'années faudra-t-il attendre pour doubler le capital

2) Intérêts composés

Placer un capital à x % par an avec intérêts composés signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et que l'année suivante ils rapportent aussi des intérêts.
On place un capital de 1000 € à $4{,}5\%$ par an avec intérêts composés. On note c_n le capital disponible au bout de n années.

a. Calculer les premiers de la suite (c_n).
b. Quel est la nature de la suite (c_n) ?
c. Au bout de combien d'année ce placement est-il plus intéressant que le précédent ?

16 La population mondiale était de 3,02 milliards d'habitants en 1960 et de 6,13 milliards en 2010.



A. Modèle linéaire

1) Calculer en milliards, l'accroissement absolu moyen par décennie, du nombre d'habitants dans le monde entre 1960 et 2000.
2) Dans ce modèle, on suppose que cet accroissement absolu reste constant pour les décennies suivantes.
On note u_n le nombre d'habitants (en milliards), n décennies après 1960.
a. Calculer les premiers de la suite (u_n).
b. Quel est la nature de la suite (u_n) ?
c. Représenter cette suite en bleu sur le graphique ci-dessus.
3) Si ce modèle restait fiable sur le long terme, en quelle année le monde comporterait-il plus de 8 milliards d'habitants ?

B. Modèle exponentiel

Dans le second modèle, on suppose que le pourcentage d'évolution entre deux décennies, reste constant égal à 18%.
On note v_n le nombre d'habitants (en milliards), n décennies après 1960.

1) a. Calculer les premiers de la suite (v_n)
b. Quel est la nature de la suite (v_n) ?
c. Représenter cette suite en rouge sur le graphique ci-dessus.
2) Quelle erreur commet-on avec ce modèle sur la population mondiale en 2000 ?

C. Comparaison des deux modèles

1) En 2010 la Terre comptait 6,93 milliards d'habitants, quel est celui qui approche le plus proche la réalité ?
2) Avec ces deux modèles faites une projection de la population mondiale en 2020.