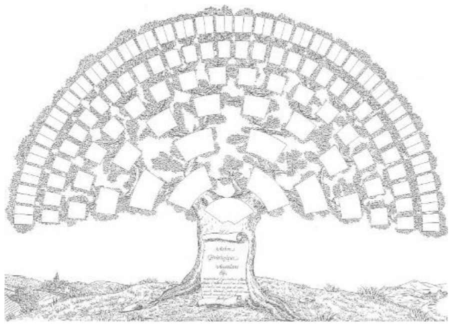
Chapitre S2 : Suites géométriques

1 – Généralités

Activité 1 : (Arbre généalogique)



1) Combien un être humain a-t-il de parents ? de grand-parents ? d'arrière-grands-parents ? d'arrière-arrière-grands-parents ?
2) On note p_n le nombre de parents du $n^{ème}$ degré.
   Ecrire la suite (p_n)
3) Quelle est la relation entre un terme et le terme suivant ?
4) Combien de membre comporte votre généalogie de vous à vos arrière-arrière-arrière-grands-parents.

Définition 1 : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** q si pour tout rang n, on a $u_{n+1} = q \times u_n$

Pour passer d'un terme au suivant, on le multiplie toujours par le même nombre q, appelé la raison

Exemple 1 :

$u_0 = 1$ et $q = 3$.

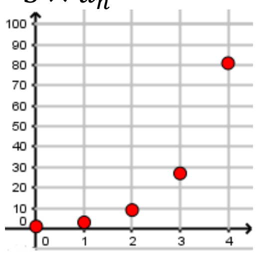
Formule de récurrence : $u_{n+1} = 3 \times u_n$

$u_1 = 3$

$u_2 = 9$

$u_3 = 27$

$u_4 = 81$



$v_0 = 2$ et $q = \frac{1}{2}$

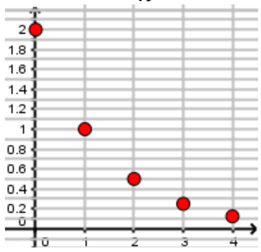
Formule de récurrence : $v_{n+1} = 0.5 \times v_n$

$v_1 = 1$

$v_2 = 0.5$

$v_3 = 0.25$

$v_4 = 0.125$



Propriété 1 : On considère une suite géométrique (u_n) de 1er terme $u_0 > 0$ de raison $q > 0$.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est **croissante**.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est **décroissante.**

2 – Formule explicite

La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans avoir à calculer tous les précédents.

Propriété 1 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout rang n, on a $u_n = u_0 \times q^n$

Remarque : Lorsque le premier terme est u_1 on utilise la formule $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Exemple 2 :

$u_0 = 2$ et $q = 3$.	$v_1 = 1$ et $q = \frac{1}{2}$
• Formule explicite : $u_n = 2 \times 3^n$	• Formule explicite : $v_n = 1 \times 0.5^{n-1}$
• Calcul de u_{10} : $= 2 \times 3^{10} = 118\,098$	• Calcul de v_8 : $= 1 \times 0.5^{8-1} = 0.5^7 = 0.0078$

3 – Application : Suites géométriques & Evolution

Lorsqu'une quantité subit plusieurs évolutions successives d'un même pourcentage a %, alors on peut modéliser mathématiquement l'évolution de cette quantité par une suite géométrique, de première terme u_0 égale à sa valeur initiale, et de raison $q = 1 + \frac{a}{100}$.

Exemple 3 : Etude d'un placement (Exercice type bac)

On place un capital de 5000 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an.

On note u_n la valeur du capital après n années de placement.

1) Déterminer u_1 et u_2.

$$u_1 = \left(1 + \frac{4}{100}\right) \times 5000 = 1.04 \times 5000 = 5200$$

$$u_2 = 1.04 \times 5200 = 5408$$

2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera le 1er terme et la raison.

Chaque année la somme placée est multiplié par 1.04.

(u_n) *est donc géométrique de 1er terme* $u_0 = 5000$ *et de raison* $q = 1.04$.

3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$$u_{n+1} = 1.04 \times u_n$$

4) Donner le sens de variation de la suite (u_n).

(u_n) *est croissante car* $q > 1$ *: Le capital augmente chaque année.*

5) Exprimer u_n en fonction de n.

Pour tout rang n, *on a* $u_n = 5000 \times 1.04^n$

6) Quel capital disposera-t-on après 8 années de placement ?

$$u_8 = 5000 \times 1.04^8 = 6842{,}85 \text{ €}$$

7) Que peut-on saisir en $B3$ pour afficher, par recopie par le bas, la valeur du capital sur les 10 premières années (voir *Figure 1*) ?

Deux formules sont possibles : $= 1.04 * B2$ *ou* $= 5000 * 1.04\text{^}A3$

8) a. Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il affiche le nombre d'années qu'il faut attendre pour doubler le capital placé. (voir *Figure 2*) ?

b. A l'aide de votre calculatrice, déterminer cette valeur.

On peut programmer l'algorithme sur calculatrice (voir Figure 3).

On peut également afficher la liste des termes a l'aide du mode SUITE.

Dans les deux cas, on trouve $n = 18$.

Figure 1 : Feuille de Calcul

	A	B
1	Année	Capital
2	0	5 000,00 €
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

Figure 2 : Algorithme

```
Variables : annee, capital
annee ← 0
capital ← 5000
Tant que u < 10000 Faire
    annee ← annee + 1
    capital ← 1.04 * capital
Fin Tant que
Afficher annee
```

Programme CASIO

```
======CAPITAL ======
0→N↵
5000→U↵
While U<10000↵
N+1→N↵
1.04×U→U↵
WhileEnd
N◢
```

Programme TI

```
PROGRAM:CAPITAL
:0→N
:5000→U
:While U<10000
:N+1→N
:1.04*U→U
:End
:Disp N
```

Suites géométriques – Fiche d'exercices

Ex 1 Ecrire les suites géométriques suivantes :

a. Premier terme : $u_0 = 3$; Raison : $q = 2$
b. Premier terme : $u_0 = 1$; Raison : $q = -1$
c. Premier terme : $u_0 = 10$; Raison : $q = \frac{1}{2}$
d. Premier terme : $u_0 = 4$; Raison : $q = \frac{1}{10}$

Ex 2 Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, déterminer la raison.

a. $(u_n) = (5; 10; 20; 40; 80; \dots)$
b. $(v_n) = (-5; -15; -45; -135\ ; \dots)$
c. $(w_n) = (2; 22; 222; 2222; 22222\ \dots)$
d. $(x_n) = (1; -10; 100; -1000; 10000; \dots)$

Ex 3 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 0.5$

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2) Calculer u_1, u_2 et u_3
3) Représenter la suite dans un repère. Que remarque-t-on ?
4) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
5) Exprimer u_n en fonction de n
6) En déduire la valeur de u_{150}

Ex 4 Jean vient d'être embaucher dans une entreprise. Il débute avec un salaire net de 1500€.
Chaque année le patron de l'entreprise augmente tous ses salariés de 2%. On note s_n le salaire de Jean au bout de sa $n^{ème}$ année de service

1) Déterminer s_0, s_1, s_2 et s_3
2) Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n
3) Quelle est la nature de la suite (s_n) ?
4) Quel sera son salaire l'année de sa retraite après 42 années de travail dans l'entreprise ?

Ex 4 **QCM (Tiré du bac Polynésie 2015)**

La suite (U_n) est géométrique de premier terme $U_0 = 10$ et de raison $q = 3$ alors :

a. $U_4 = 22$ **b.** $U_4 = 810$ **c.** $U_4 = 10 \times 3^3$ **d.** $U_4 = 10 + 3 \times 4$

Ex 5 **QCM (Tiré du bac Métropole 2018)**

Une espèce d'oiseaux rares voit sa population diminuer de 3 % chaque année.

On recense 300 oiseaux de cette espèce en 2017.

On modélise le nombre d'oiseaux de cette espèce en l'année $2017+n$ par une suite (u_n).

Ainsi $u_0=300$.

1. En 2018, la population sera de :

A. 291 oiseaux **B.** 297 oiseaux **C.** 90 oiseaux **D.** 210 oiseaux

2. La suite (u_n) est :

A. arithmétique de raison – 9
B. géométrique de raison 0,03
C. géométrique de raison 0,97
D. ni arithmétique, ni géométrique

3. On donne la feuille de tableur ci-dessous :

	A	B
1	n	u(n)
2	0	300
3	1	
4	2	

Quelle formule saisie dans la cellule B3 permettra d'afficher les termes successifs de la suite (u_n) en l'étirant vers le bas ?

A. = B2 – 0,03 **B.** = B2 * 0,03 **C.** = B2 * 0,97^A3 **D.** = B2 * 0,97

4. On donne un extrait des résultats obtenus dans la feuille de tableur précédente :

	A	B
22	20	163
23	21	158
24	22	153
25	23	149

On peut en déduire que la population aura diminué de moitié par rapport à 2017 à partir de :

A. 2039 **B.** 2040 **C.** 2041 **D.** 2042

Ex 6 **QCM (Tiré du bac Polynésie 2018)**

Un village comptait 1100 habitants en 2010. On a constaté depuis cette date une diminution annuelle de la population d'environ 5 %.
On modélise le nombre d'habitants de ce village à partir de 2010 par une suite géométrique (u_n).

1. Pour tout entier naturel n, on a :
   a) $u_n = 1100 \times 0{,}95^n$ b) $u_n = 1100 \times (1{,}05)^n$ c) $u_n = 1100 - 0{,}95n$
2. La feuille de calcul ci-dessous, extraite d'un tableur, permet d'estimer le nombre d'habitants de ce village à partir de 2010.

	A	B	C
1	Année	Rang	Nombre d'habitants
2	2010	0	1100
3	2011	1	
4	2012	2	
5	2013	3	
6	2014	4	
7	2015	5	
8	2016	6	
9	2017	7	
10	2018	8	
11	2019	9	
12	2020	10	
13	2021	11	
14	2022	12	
15	2023	13	
16	2024	14	

   Le format de cellule a été choisi pour que tous les nombres de la colonne C soient arrondis à l'unité.
   Une formule que l'on peut saisir dans la cellule C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs de la plage de cellules C3:C9 est :
   a) =C2*1,05 b) =C2*0,95 c) =C$2*0,95
3. Le nombre u_n d'habitants aura diminué de moitié à partir de :
   a) L'année 2024 b) L'année 2014 c) L'année de rang 13
4. Selon le modèle retenu, l'algorithme qui donne la première année pour laquelle le nombre d'habitants aura diminué de moitié est :

a) Algorithme 1

Entrées	A entier naturel u réel

Traitement	u prend la valeur 1100
	A prend la valeur 2010
	Tant que $u > 550$
	  u prend la valeur $0{,}95 \times u$
	  A prend la valeur $A + 1$
	Fin de Tant que
	Afficher A

b) Algorithme 2

Entrées	A entier naturel u réel

Traitement	u prend la valeur 1100
	A prend la valeur 2010
	Tant que $u \leq 550$
	  u prend la valeur $0{,}95 \times u$
	  A prend la valeur $A + 1$
	Fin de Tant que
	Afficher A

c) Algorithme 3

Entrées	A entier naturel u réel
Traitement	u prend la valeur 1100 A prend la valeur 2010 Tant que $u > 550$ u prend la valeur $0{,}95 \times u$ Fin de Tant que Afficher A

Ex 7 **QCM (Tiré du bac Polynésie 2018)**

Une ville a décidé d'augmenter de 10 % ses logements sociaux chaque année. En 2012 elle avait 150 logements sociaux. Pour tout entier n, on note a_n le nombre de logements sociaux dans cette ville en (2012+n). On a donc $a_0 = 150$.

3. On aura alors :

a. $a_1 = 135$ **b.** $a_3 = 180$ **c.** $a_3 = 195$ **d.** $a_n = 150 \times 1{,}10^n$

4. La ville souhaite au moins doubler le nombre de ses logements sociaux. Cet objectif sera dépassé en :

a. 2015 **b.** 2017 **c.** 2020 **d.** 2022

Ex 8 **QCM (Tiré du bac Antilles - Guyane 2018)**

Dans le cadre d'une étude économique, une hypothèse retenue est, qu'entre 2017 et 2025, le montant mensuel brut du SMIC augmente de 1 % par an. Ce montant mensuel est modélisé par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1\,480{,}27$.
L'entier n désigne le rang de l'année $(2017 + n)$.

1. Pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n est :
   a. $u_n = 1\,480{,}27 \times 1{,}01^n$ b. $u_n = 1\,480{,}27 + 0{,}01n$
   c. $u_n = 1\,480{,}27 \times 0{,}01^n$ d. $u_n = 1\,480{,}27 + 1{,}01n$

2. Avec ce modèle, une estimation du montant mensuel brut du SMIC en 2022 est :
   a. 1 540,37 € b. 1 554,28 € c. 1 555,78 € d. 1 571,34 €

Ex 9 Places de parking (Tiré du Bac Métropole 2014)

Dans une ville, on estime qu'à partir de 2013, le nombre de voitures électriques en circulation augmente de 12 % par an.
Au 1er janvier 2013, cette ville propose 148 places de parking spécifiques avec borne de recharge. La commune prévoit de créer chaque année 13 places supplémentaires.
La feuille de calcul ci-dessous doit rendre compte de ces données.
Les cellules sont au format « nombre à zéro décimale ».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Date	1er janvier 2013	1er janvier 2014	1er janvier 2015	1er janvier 2016	1er janvier 2017	1er janvier 2018	1er janvier 2019
2	Nombre de voitures électriques	100	112					
3	Nombre de places spécifiques	148	161					

Partie A

1. Préciser une formule qui, entrée en cellule C2, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir le contenu des cellules de la plage C2 : H2.
2. Déterminer le pourcentage global d'évolution du nombre de voitures électriques en circulation entre 2013 et 2016, arrondi à 0,1 %.
3. Soit n un entier naturel. Le nombre de voitures électriques en circulation au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ est modélisé par le terme V_n d'une suite géométrique.
   Ainsi $V_0 = 100$.
   a. Déterminer la raison de la suite (V_n).
   b. Préciser l'expression de V_n en fonction de n.
   c. Calculer V_8 et V_9 arrondis à l'unité.

Partie B

1. Préciser une formule qui, entrée en cellule C3, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir le contenu des cellules de la plage C3 : H3.
2. Soit n un entier naturel. On note P_n le nombre de places de parking spécifiques au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$. Ainsi $P_0 = 148$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n : $P_n = 13n + 148$.
   b. En quelle année le nombre de places de parking spécifiques dépassera-t-il pour la première fois 250 ?

Partie C

En utilisant les parties A et B, déterminer l'année à partir de laquelle on peut prévoir que le nombre de places de parking spécifiques sera insuffisant.
La méthode employée pour répondre à cette question devra être expliquée.

Ex 10 Encours des ISR (Tiré du Bac Métropole 2018)

Le tableau suivant, extrait d'une feuille automatisée de calcul, fournit l'évolution des encours (solde comptable) des Investissements Socialement Responsables (ISR) détenus par les investisseurs français, au 1er janvier des années allant de 2010 à 2014. La plage de cellules C3:F3 est au format pourcentage arrondi à l'unité.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014
2	Encours des ISR (en milliard d'euros)	68,3	115,3	149,0	169,7	222,9
3	Taux d'évolution annuel (en pourcentage)					

Source : Novethic

1. Choisir, parmi les propositions suivantes, la formule à saisir dans la cellule C3 d'un tableur afin d'obtenir par recopie vers la droite les taux d'évolution annuels jusqu'en 2014, des encours des investissements socialement responsables :

=(C2−B2)/C2	=(C2−B2)/B2	=C2/B2	=(C2−B2)/B2	=(B2−C2)/C2

2. Quelle est la valeur affichée dans la cellule F3 ?

Partie B

On suppose que la valeur des encours des investissements socialement responsables augmente tous les ans de 30 % à partir de 2014. On note u_n la valeur des encours des investissements socialement responsables, exprimée en milliard d'euros, au 1er janvier de l'année $(2014 + n)$.
On a ainsi $u_0 = 222,9$.

1. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
3. En déduire une estimation de la valeur des encours des investissements socialement responsables, au 1er janvier 2018.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 222,9
Tant que U < 1000
    N ← N + 1
    U ← 1,3 × U
Fin Tant que
```

   a. Quelles valeurs contiennent les variables N et U après exécution de cet algorithme ?
   b. Interpréter ces valeurs dans le contexte étudié.

Ex 11 Diabète de type 1 (Tiré du Bac Pondichery 2017)

En 2016, 542 000 enfants dans le monde étaient atteints de diabète de type 1. Des études récentes permettent de supposer que le nombre d'enfants diabétiques va augmenter de 3 % par an à partir de 2016. On note u_n le nombre d'enfants diabétiques dans le monde pour l'année $(2016+n)$. Ainsi $u_0 = 542\,000$.

1. Étude de la suite (u_n) :
   a. Calculer u_1.
   b. Donner la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
   c. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
   d. La feuille de calcul ci-dessous, extraite d'un tableur, permet de calculer les termes de la suite (u_n). Les cellules de la colonne C sont au format « nombre à zéro décimale ». Quelle formule, saisie dans la cellule C3 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C ?

	A	B	C
1	Année	n	u_n
2	2016	0	542 000
3	2017	1	
...	...	...	...

2. Calculer le nombre d'enfants atteints de diabète de type 1 dans le monde en 2021.

3. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation : U prend la valeur 542 000
N prend la valeur 0
Traitement : Tant que $U < 625\,000$
  U prend la valeur $1{,}03 \times U$
  N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que

   a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les valeurs de U à l'unité.

U	542 000	558 260				
N	0	1				
$U < 625\,000$?	VRAI					

   b. Que permet de calculer cet algorithme dans le contexte de l'exercice ?

Ex 12 Proposition de salaire (Tiré du Bac Antille – Guyane Septembre 2015)

Un employeur donne le choix à un salarié à temps partiel entre deux modes de rémunération :

– proposition A : salaire mensuel brut de 1 200 € au premier janvier 2015 puis, chaque année au premier janvier, augmentation de 15 € du salaire mensuel brut ;
– proposition B : salaire mensuel brut de 1 000 € au premier janvier 2015, puis, chaque année au premier janvier, augmentation de 4 % du salaire mensuel brut.

On se propose d'étudier quelle est la proposition la plus intéressante pour ce salarié.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

– u_n le salaire mensuel brut au premier janvier de l'année $(2015 + n)$ pour la première proposition ;
– v_n le salaire mensuel brut au premier janvier de l'année $(2015 + n)$ pour la deuxième proposition.

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Donner la nature et la raison de chacune des suites (u_n) et (v_n).
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n et v_n en fonction de n.
4. Calculer, pour chacune des deux propositions, le salaire mensuel brut en 2023.
   Les résultats seront arrondis à l'euro.
5. Une feuille de calcul a été élaborée dans le but de calculer le salaire mensuel brut, au premier janvier de chaque année, pour chacune des deux propositions de rémunération.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
2	Un	1200	1215											
3	Vn	1000	1040											

   a. Préciser une formule qui, entrée en cellule C2, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir le contenu de la plage C2 : N2.
   b. Préciser une formule qui, entrée en cellule C3, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir le contenu de la plage C3 : N3.
6. À partir de quelle année le salaire mensuel brut obtenu avec la proposition B dépasse-t-il celui de la proposition A ?