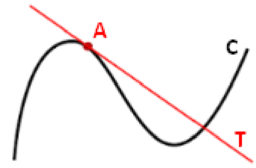
Chapitre F1 : Tangente et dérivation

1 – Tangente à une courbe

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et A un point appartenant à la courbe de f. On appelle tangente à la courbe de f en A, la droite qui passe au plus près de la courbe autour du point A.



La droite T est tangente à la courbe C en A :

La droite « frôle » la courbe et la « touche » au point A.

Remarque : Lorsqu'elle existe la tangente a une courbe possède une équation de la forme $y = ax + b$. En pratique, pour déterminer l'équation d'une tangente on utilise la calculatrice. A partir de cette équation, on peut facilement tracer la droite .

Rappel : a → **Coefficient directeur** (ou **pente**) et b → **Ordonnée à l'origine**

Tutoriel : Déterminer l'équation de la tangente d'une fonction f à la calculatrice

• **CASIO** : 1) On trace la courbe de la fonction : On appuie sur MENU / GRAPH. On entre la formule de la fonction dans $Y1$: en utilisant la touche X,θ,T pour la variable « x » et on appuie sur EXE puis sur F6 (DRAW).
2) On trace la tangente : On appuie ensuite sur SHIFT + F4 (SKTCH) + F2 (Tang) puis on entre la valeur souhaitée et on appuie sur EXE et encore sur EXE. L'équation apparaît en bas de la fenêtre.

• **TI** : 1) On trace la courbe de la fonction : On appuie sur la touche Y= et on entre la formule dans $Y1 =$ en utilisant la touche X,T,θ,n pour la variable « x » puis on appuie sur la touche GRAPH.
2) On trace la tangente : On appuie en suite sur la touche 2nd + PRGM (Draw) puis sur la touche 5 (Tangente). On entre la valeur souhaitée et on appuie sur ENTER. L'équation apparaît en bas de la fenêtre.

Exemple 1 : On a tracé ci-dessous la courbe C_f de la fonction $f(x) = x^2$. On considère les points A et B de la courbe C_f d'abscisse respectif 1 et -2

1) a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f en A.

   A l'aide de la calculatrice on trouve pour $x = 1$, $T: y = 2x - 1$

   b. Tracer cette tangente.

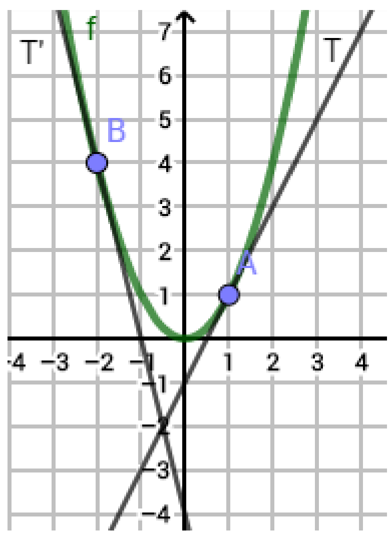
   $a = 2$ et $b = -1$

2) a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f en B.

   A l'aide de la calculatrice on trouve pour $x = -2$ $T : y = -4x - 4$

   b. Tracer cette tangente.

   $a = -4$ et $b = -4$



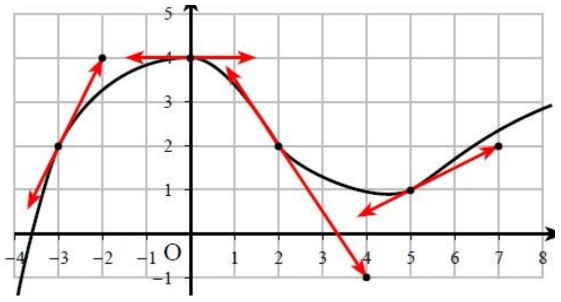
2 – Nombre dérivée

Définition 2 : On appelle **nombre dérivée** de f en a, et on note $f'(a)$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point A, d'abscisse a.

Exemple 1 (Suite) : Soit f la fonction $f(x) = x^2$. On a $f'(1) = 2$ et $f'(-2) = -4$

Rappel : Pour déterminer graphiquement la pente de la tangente on peut utiliser la formule : $pente = \frac{\uparrow}{\rightarrow}$

Exemple 2 : On a tracé ci-dessous, la courbe d'une fonction ainsi que quelques-unes de ses tangentes



Déterminer graphiquement :

- $f'(-3) = 2$
- $f'(0) = 0$
- $f'(2) = -\frac{3}{2}$
- $f'(5) = \frac{1}{2}$

3 – Fonction dérivée

Définition 3 : On appelle **fonction dérivée** de f, la fonction noté f', qui à chaque nombre x de I, associe le nombre dérivée $f'(x)$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **positive** sur I.
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **négative** sur I.

Remarque : Lorsque la fonction change de sens variation, la fonction dérivée s'annule.

Exemple 3 : Une fonction et sa dérivée.

Fonction f

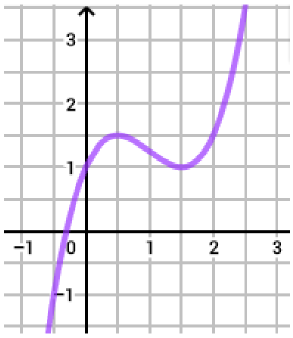


Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0.5		1.5		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1.5	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Fonction dérivée f'

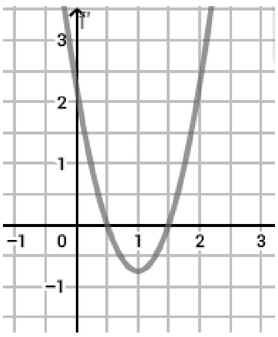
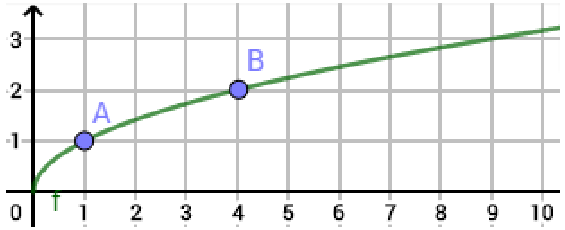


Tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		0.5		1.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tangente et Dérivation – Fiche d’exercices

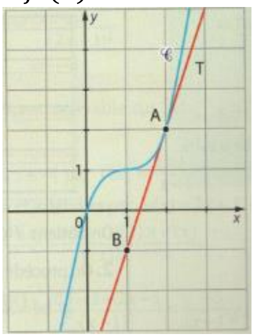
Ex 1 On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$



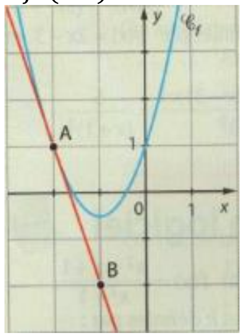
1) Déterminer une équation des tangentes T_1 et T_4 à la courbe de f.
2) Tracer les tangentes T_1 et T_4 à la courbe de f.

Ex 2 Pour chacune des fonctions suivantes, la droite T est la tangente à la courbe de f au niveau du point A. Déterminer graphiquement les nombres dérivées suivants :

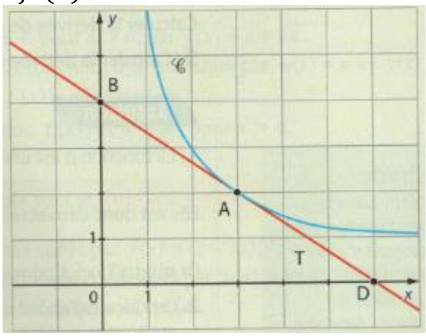
- $f'(2)$



- $f'(-2)$

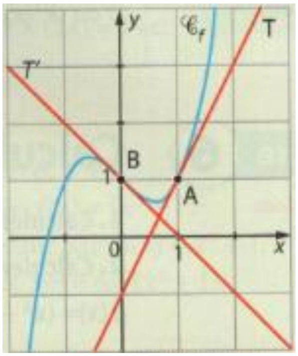


- $f'(3)$



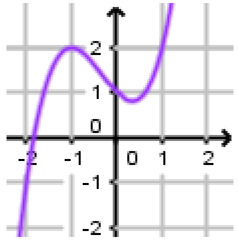
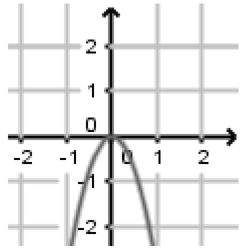
Ex 3 On a tracé ci-dessous la courbe représentative d’une fonction f ainsi que les tangeantes T et T' à la courbe de f en 0 et 1.

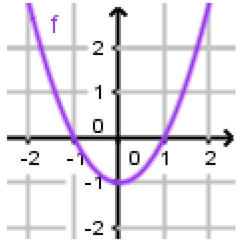
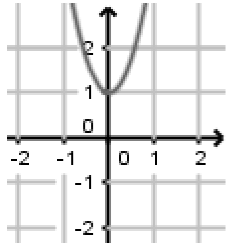
1) Déterminer graphiquement l’image des nombres 0 et 1 par f
2) Déterminer graphiquement les nombres dérivées de f en 0 et 1.
3) Déterminer graphiquement une équation des tangentes T et T'

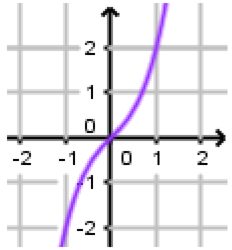
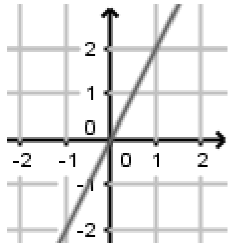


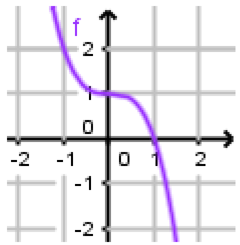
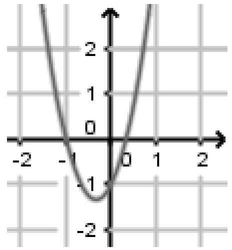
Ex 4 Associer à chaque courbe de fonction f, la bonne courbe pour sa fonction dérivée f'.

Fonction f — **Fonction dérivée f'**

 • • 

 • • 

 • • 

 • • 

Ex 5 QCM (Tiré du bac Antilles - Guyanne 2015)

On considère la fonction g définie pour tout nombre réel x par :

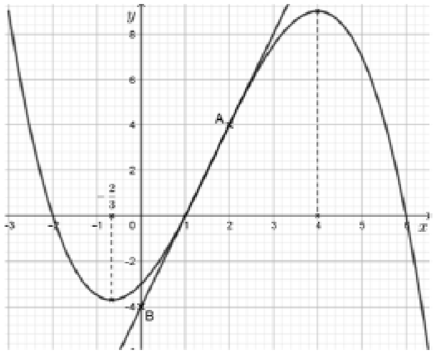
$$g(x) = 2x^3 + 4x + 2$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2 est :

a) $y = 26x + 2$ b) $y = 28x - 30$ c) $y = 28x + 26$

Ex 6 QCM (Tiré du bac Métropole 2018)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;6,5]$ dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous. Sur ce graphique figure également la droite (AB) tangente à la courbe C_f au point $A(2\,;4)$.



On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-3\,;6,5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

(i). $f'(2)$ est égal à :

a. 4 b. $\frac{1}{2}$ c. -4 d. 2

(ii). L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est :

a. $[-3\,;-2] \cup [1\,;6]$ b. $[-3\,;-\frac{2}{3}] \cup [4\,;6,5]$ c. $[-\frac{2}{3}\,;4]$ d. $[-2\,;1] \cup [6\,;6,5]$

Ex 7 QCM (Tiré du bac Pondichery 2017)

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\,;8]$.

x	-5		$-2{,}5$		4		8
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-1	↗	4

On note f' la fonction dérivée de f.

a. $f'(-2{,}5)=1$ *b.* $f'(-1)<0$ *c.* $f'(-1)=4$ *d.* $f'(0)=2$

Ex 8 QCM (Tiré du bac Polynésie Spetembre 2015)

Pour les deux questions suivantes, on considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;2{,}5]$ et dont la représentation graphique C_f est tracée ci-dessous.
On note f' la fonction dérivée de f.
Les tangentes à la courbe sont horizontales uniquement aux points d'abscisses $x=0$ et $x=2$.

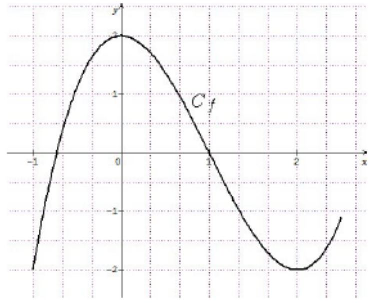
3. La fonction f vérifie :

a. $f'(1)<0$

b. $f'(1)=0$

c. $f'(1)=1$

d. $f'(1)=-5$



4. Sur l'intervalle $[0\,;2]$:

a. f' change de signe

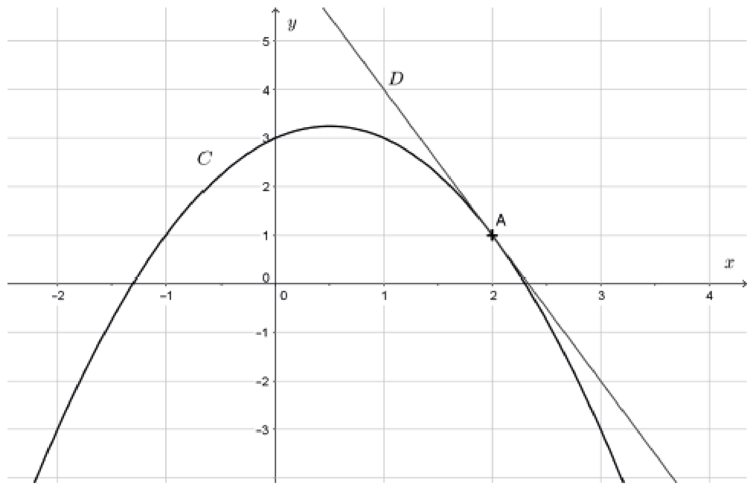
b. f' s'annule une fois

c. f' est négative ou nulle

d. f' est décroissante

Ex 9 QCM (Tiré du bac Antilles - Guyane 2017)

4. On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + x + 3$ sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous :



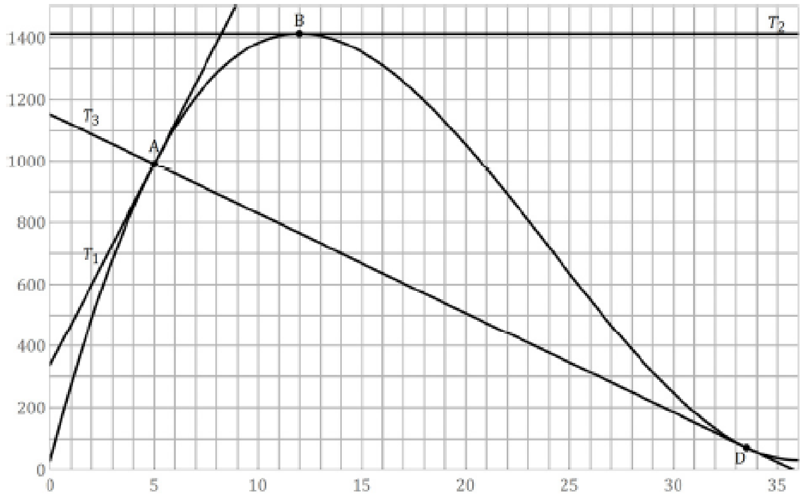
Le point A de la courbe $\mathcal{C}$ a pour coordonnées $(2\,;1)$. La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

Une équation de la droite $\mathcal{D}$ est

a) $y = -3x + 7$ b) $y = -3x + 1$
c) $y = -x + 2$ d) $y = 2x + 1$

Ex 10 QCM (Tiré du bac Métropole 2015)

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation d'une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 36].



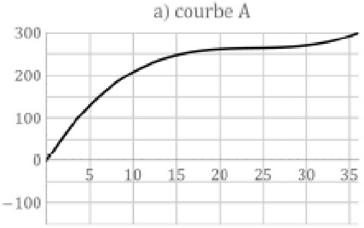
A est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse 5, B celui d'abscisse 12 et D celui d'abscisse 33,5.
T_1 est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, T_2 celle au point B et T_3 celle au point D.

1. L'image de 12 par la fonction f est environ
   a) 0 b) 760 c) 1410 d) 1900

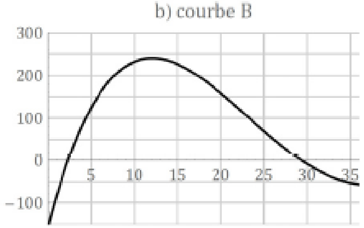
2. $f'(5)$ est environ égal à
   a) -30 b) 125 c) -125 d) 1,25

3. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction dérivée de f. Laquelle ?

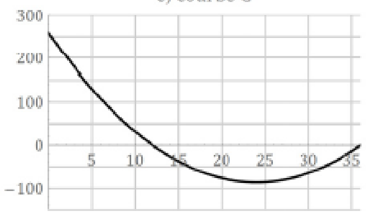
a) courbe A



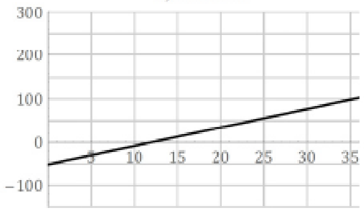
b) courbe B



c) courbe C



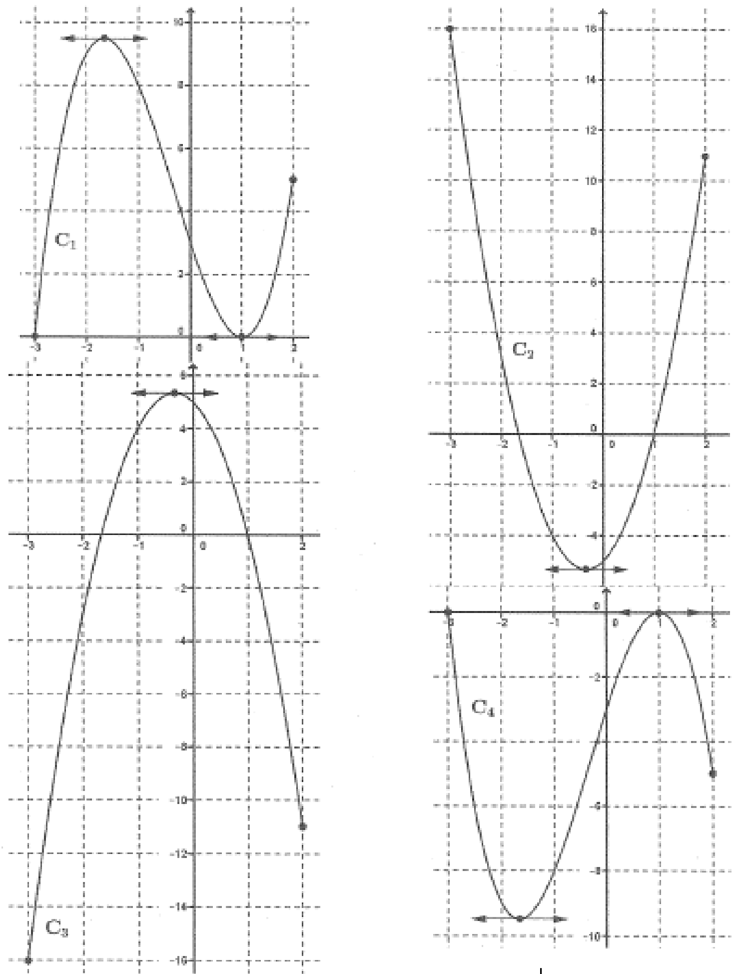
d) courbe D



Ex 11 Quatre fonctions (Tiré du bac Pondichery 2014)

Quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4, définies et dérivables sur l'intervalle $[-3;2]$, sont représentées respectivement par les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 ci-dessous.

On admet que $f_1(-\frac{5}{3}) = 9{,}5$, $f_2(-\frac{5}{3}) = 0$, $f_3(-\frac{5}{3}) = 0$ et $f_4(-\frac{5}{3}) \approx -9{,}5$.



1. Par lecture graphique, sans justifier :

   a) Donner le tableau de variation de la fonction f_1.

   b) Donner le tableau de signes de la fonction f_2.

   c) Donner le signe de $f_3'(-1)$, f_3' étant la dérivée de la fonction f_3.

   d) Donner l'image de 2 par la fonction f_4.

2. On considère la fonction g définie sur $[-3; 2]$ par $g(x) = (x-1)^2(x+3)$.

a) Vérifier que $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

b) Sachant que la fonction g est l'une des quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 tracées ci-dessus, quelle est cette fonction ? Justifier