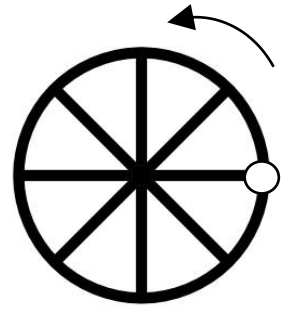


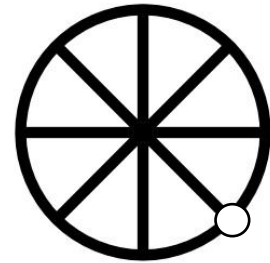
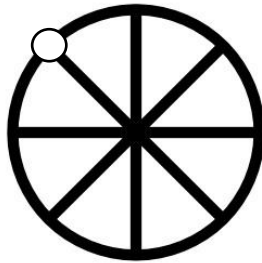
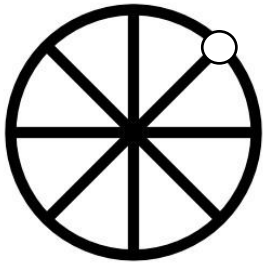
## Trigonométrie - Activités

### Activité 1 : La roue

On dispose d'une roue de rayon  $1\text{ m}$  sur laquelle on a collé une petite étiquette blanche pour se repérer. La roue est positionnée au départ comme sur le dessin ci-contre, puis on fait rouler la roue de droite à gauche.

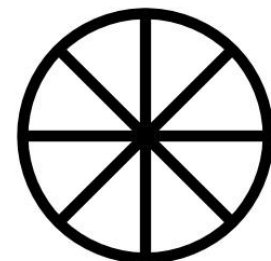
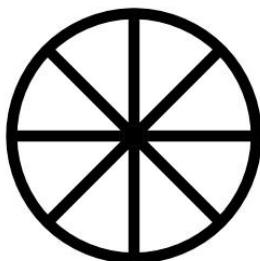
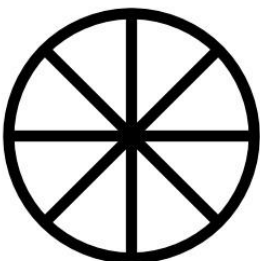


- 1) Quelle est le périmètre de la roue ?
- 2) Quelle distance la roue a-t-elle parcouru lorsque celle-ci a effectuée :
  - a. Un demi-tour ?
  - b. Un quart de tour ?
  - c. Un trois quart de tour ?
  - d. Deux tours et demi ?
- 3) a. L'étiquette est positionnée comme indiquée ci-dessous. Quelle distance la roue a-t-elle pu parcourir ?

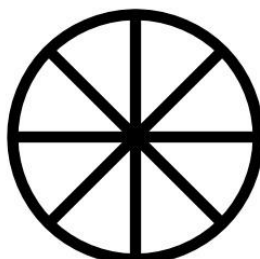


- b. Même question en faisant cette fois-ci la roue dans le sens inverse.

- 4) Dans quelle position se trouve l'étiquette lorsque la roue a parcourue les distances suivantes :
  - a.  $7\pi\text{ m}$
  - b.  $\frac{5\pi}{4}\text{ m}$
  - c.  $\frac{13\pi}{2}\text{ m}$



- 5) Dans quelle position se trouve l'étiquette lorsque la roue a parcouru  $100\text{ m}$



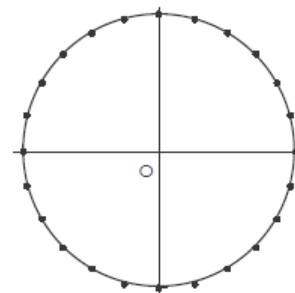
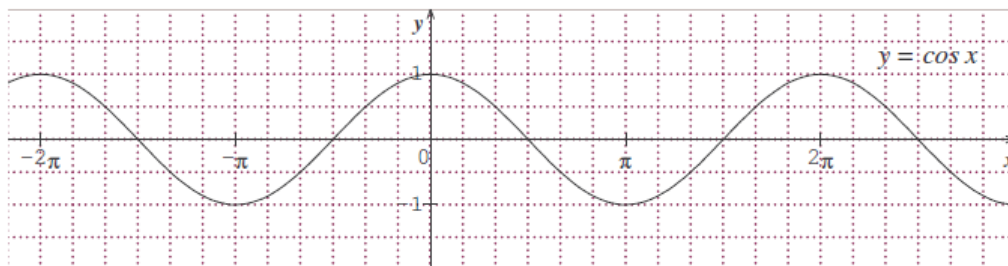
## Activité 2 : Lien entre les courbes des fonctions cosinus/sinus et le cercle trigonométrique

Cet exercice est à faire deux fois, une première fois en n'utilisant que les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus, une deuxième fois en n'utilisant que le cercle trigonométrique.

Compléter les phrases suivantes :

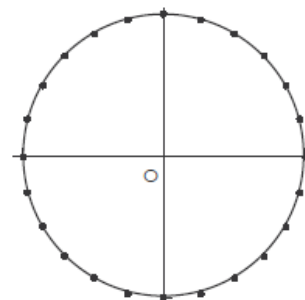
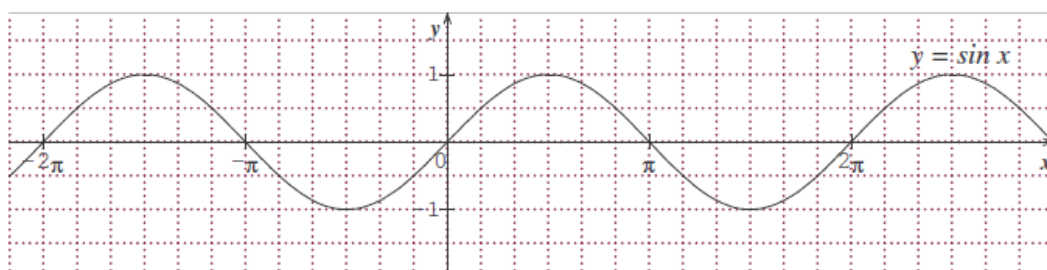
1. Si  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ , alors  $\cos x \in \dots\dots\dots$  car la fonction cos est  $\dots\dots\dots$  sur l'intervalle  $\dots\dots\dots$

- (a) Colorier la partie de la courbe qui vous sert à répondre.
- (b) Colorier la partie du cercle trigonométrique qui vous sert à répondre.



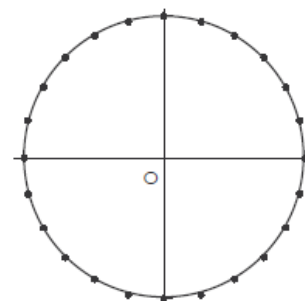
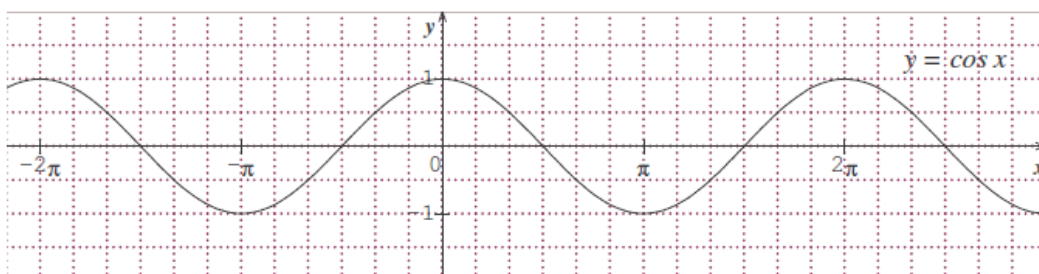
2. Si  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ , alors  $\sin x \in \dots\dots\dots$  car la fonction sin est  $\dots\dots\dots$  sur l'intervalle  $\dots\dots\dots$

- (a) Colorier la partie de la courbe qui vous sert à répondre.
- (b) Colorier la partie du cercle trigonométrique qui vous sert à répondre.



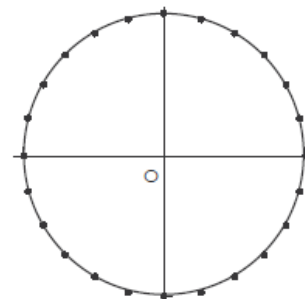
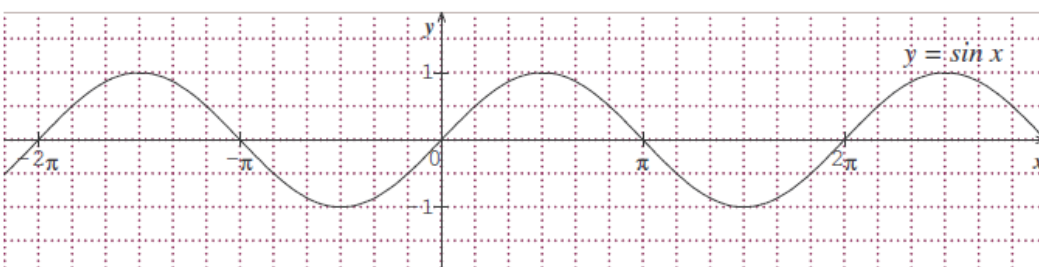
3. Si  $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ , alors  $\cos x \in \dots\dots\dots$  car  $\dots\dots\dots$

- (a) Colorier la partie de la courbe qui vous sert à répondre.
- (b) Colorier la partie du cercle trigonométrique qui vous sert à répondre.



4. Si  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ , alors  $\sin x \in \dots\dots\dots$  car  $\dots\dots\dots$

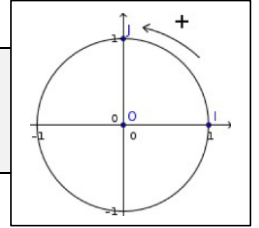
- (a) Colorier la partie de la courbe qui vous sert à répondre.
- (b) Colorier la partie du cercle trigonométrique qui vous sert à répondre.



# Trigonométrie - Cours

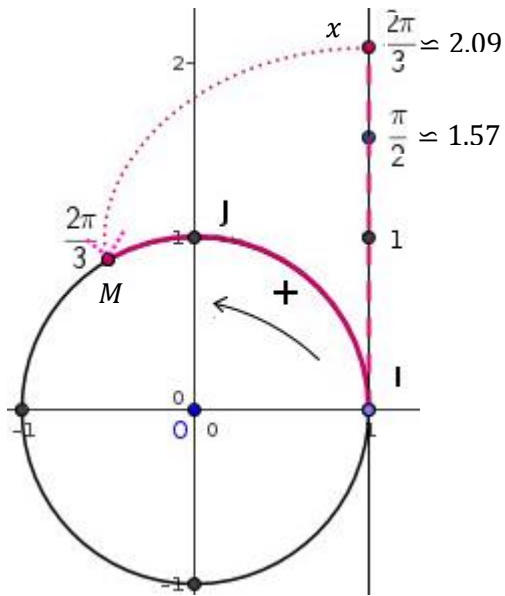
## 1 – Cercle trigonométrique

**Définition 1** : Dans le repère orthonormé  $(O; I, J)$ , le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

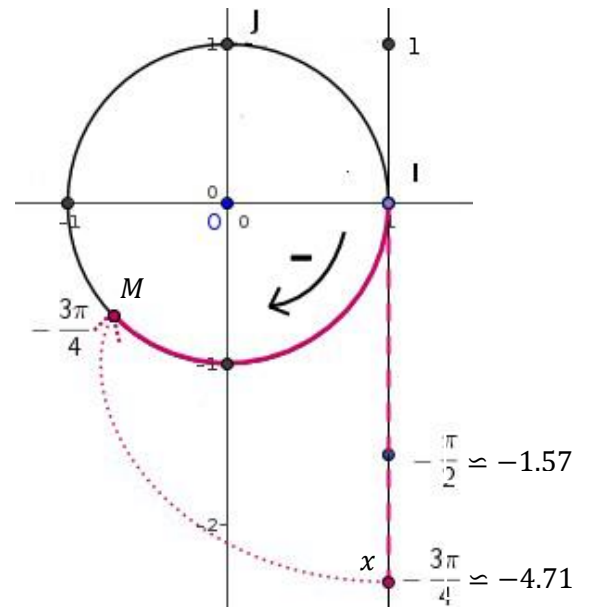


- On peut enrouler la droite des réels autour du cercle trigonométrique :

Dans le sens **direct** pour les nombres positifs :

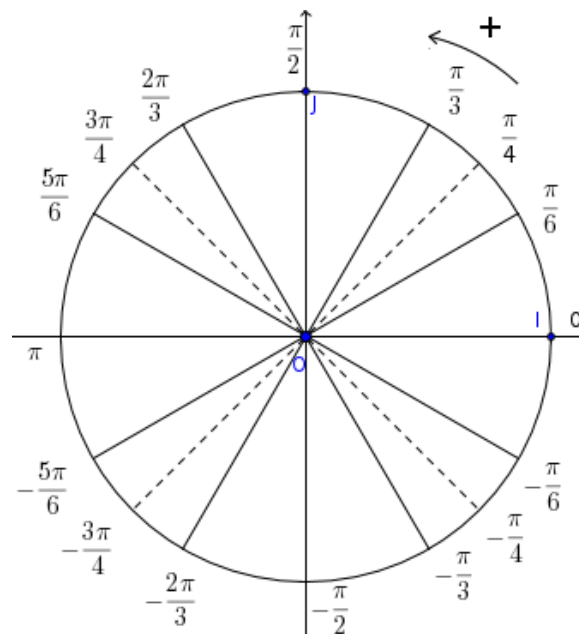


Dans le sens **indirect** pour les nombres négatifs :



- A chaque réel  $x$  de la droite numérique, on associe un **unique** point  $M$  du cercle trigonométrique
- Le point  $M$  est alors associé à **tous** les réels de la forme  $x + k2\pi$  avec  $k$  entier.
- Lorsque  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $x$  est la longueur de l'arc de cercle  $\widehat{IM}$

- On obtient alors la figure suivante, avec les valeurs remarquables suivantes :

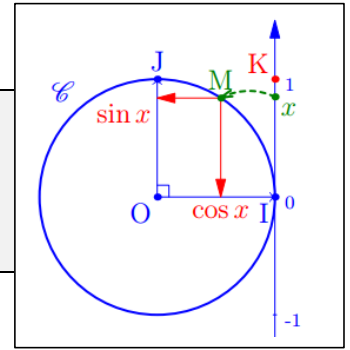


## 2 – Cosinus et sinus d'un nombre réel

Dans le repère orthonormé  $(O; I, J)$ , on considère le cercle trigonométrique

**Définition 2 :** Soit  $M$  le point du cercle trigonométrique associé au réel  $x$ .

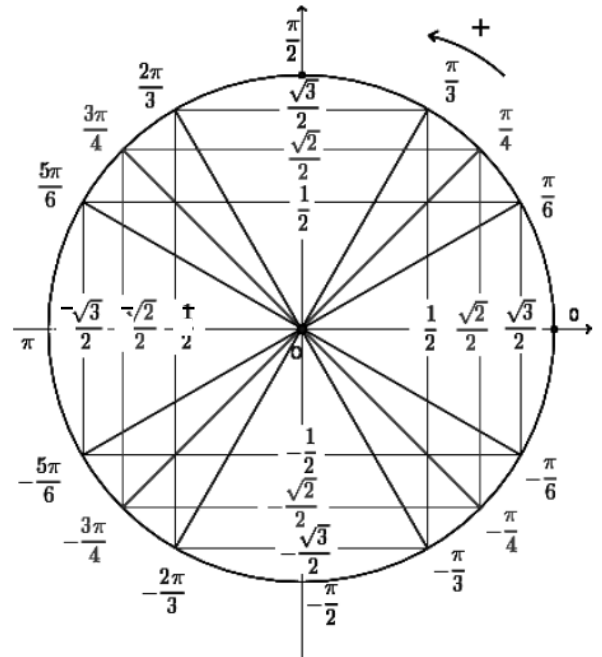
- On appelle **cosinus** du réel  $x$  et note  $\cos(x)$ , l'**abscisse** du point  $M$
- On appelle **sinus** du réel  $x$  et note  $\sin(x)$ , l'**ordonnée** du point  $M$



**Remarque :** Le point  $M$  a donc pour coordonnées :  $M(\cos(x) ; \sin(x))$

**Valeurs remarquables à connaître :**

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



- $\cos(\pi) = -1$
- $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$
- $\sin(\pi) = 0$
- $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

**Propriété 1 :** Pour tout réel  $x$ , on a :  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

**Propriété 2 :** Pour tout réel  $x$ , on a  $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$  et  $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$ , pour  $k$  entier.

**Propriété 3 :** Pour tout réel  $x$ , on a  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ .

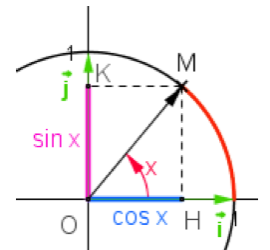
**Démonstration :** Soit  $x$  un nombre réel et  $M$  le point du cercle qui lui est associé.

Dans le repère  $(O; I; J)$  le point  $M$  a pour coordonnées  $M(\cos(x) ; \sin(x))$

Plaçons le point  $H(\cos(x) ; 0)$ . Le triangle  $OHM$  est donc rectangle en  $H$ .

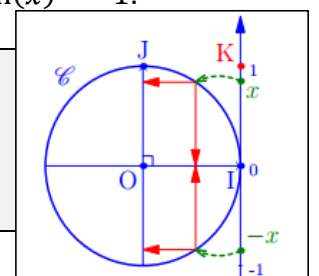
On a  $OH = \cos(x)$  ;  $HM = \sin(x)$  et  $OM = 1$  (c'est la rayon du cercle trigonométrique)

D'après le théorème de Pythagore on a  $OH^2 + HM^2 = OM^2$  c'est-à-dire  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ .



**Propriété 4 :** Pour tout réel  $x$ , on a les formules suivantes :

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$

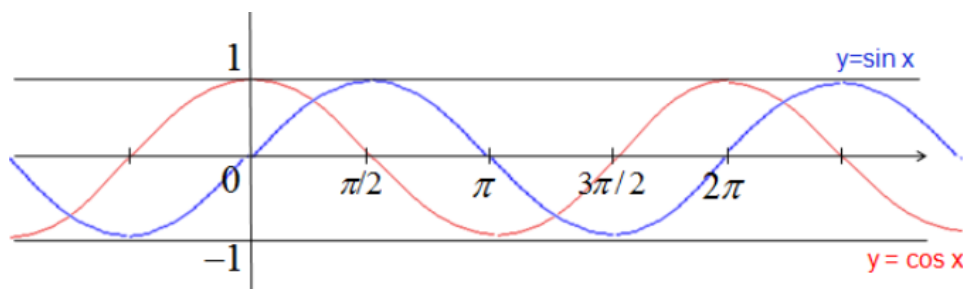


**Exemple 1 :** •  $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  •  $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$



### 3 – Fonctions cosinus et sinus

- On appelle **fonction cosinus** la fonction qui à chaque nombre réel  $x$  associe son cosinus.
- On appelle **fonction sinus** la fonction qui à chaque nombre réel  $x$  associe son sinus.

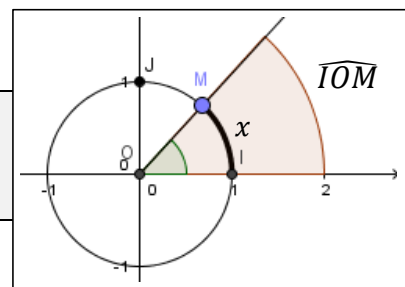


- Ces fonctions sont définies sur  $\mathbb{R}$  et elles sont bornées entre  $-1$  et  $1$ .
- Ces fonctions sont  **$2\pi$ -périodiques** : Pour tout réel  $x$ ,  $f(x + k2\pi) = f(x)$  (où  $k$  est un entier)  
Graphiquement, cela se traduit par la répétition d'un même « motif » de courbe tous les  $2\pi$ .
- La fonction cosinus est **paire** : Pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$   
Graphiquement, cela se traduit par une symétrie de sa courbe par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus est **impaire** : Pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = -f(x)$   
Graphiquement, cela se traduit par une symétrie de sa courbe par rapport à l'origine du repère

### 4 – Le Radian

Le radian est une unité de mesure d'angle :

**Définition 3** : La mesure en radian de l'angle  $\widehat{IOM}$  est la longueur  $x$  de l'arc de cercle  $\widehat{IM}$  sur le cercle trigonométrique. On note alors  $\widehat{IOM} = x \text{ rad}$



**Mesure en radian des angles remarquables :**

Mesure en degré	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$360^\circ$
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$

**Remarque** : Pour convertir des degrés en radians et inversement il suffit de faire un produit en croix.

**Exemple 2** : Conversion

1) Un angle mesure  $20^\circ$ . Quelle est sa mesure en radian ?

$180^\circ$	$20^\circ$
$\pi$	?

 $\times \frac{\pi}{180}$ 
 $\frac{20 \times \pi}{180} = \frac{40\pi}{360} = \frac{\pi}{9}$ . Il mesure  $\frac{\pi}{9}$  radians

2) Un angle mesure  $\frac{5\pi}{4}$  rad. Quelle est sa mesure en degré ?

$180^\circ$	?
$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$

 $\times \frac{180}{\pi}$ 
 $\frac{5\pi \times 180}{\pi} = \frac{5}{4} \times 180 = 225^\circ$ . Il mesure  $225^\circ$

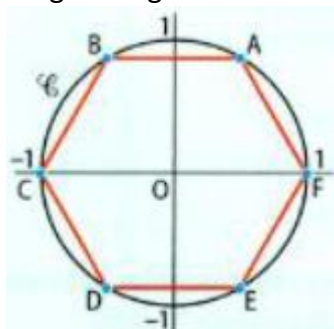


# Trigonométrie - Exercices

## Enroulement de la droite, Radian

### 1 (Hexagone)

On a placé six points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sur le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  ci-dessous de manière à obtenir un hexagone régulier.

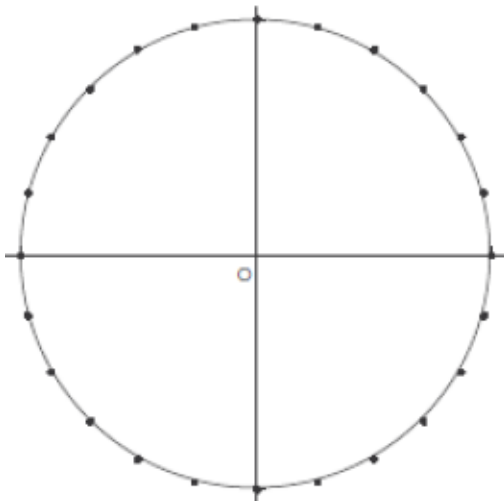


Pour chacun des réels suivants, trouver le point qui est son image par enroulement de la droite numérique.

- |                     |                     |                      |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| a. $\frac{\pi}{3}$  | b. $-\frac{\pi}{3}$ | c. $\frac{2\pi}{3}$  |
| d. $\frac{6\pi}{3}$ | e. $\frac{5\pi}{3}$ | f. $-\frac{4\pi}{3}$ |

### 2 (Placement de points sur le cercle)

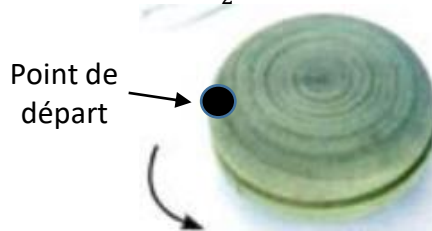
Le cercle trigonométrique suivant est gradué de  $\frac{\pi}{12}$  en  $\frac{\pi}{12}$



- 1) Placer sur le cercle les points images des réels suivants :  $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{6}$
- 2) Même question avec  $\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{15\pi}{4}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}$
- 3) Même question avec  $\frac{71\pi}{12}, -\frac{35\pi}{12}$

### 3 (Yoyo)

On enroule une ficelle autour d'un yoyo de rayon 1 cm comme sur la figure ci-dessous. La longueur de la ficelle est de  $\frac{15\pi}{2}$  cm



- 1) Combien fait-on de tours entiers ?
- 2) Où se trouve l'autre extrémité de la ficelle enroulé

### 4 (Même image)

Dans chacun des cas suivants dire si les points images par enroulement des deux réels donnés sont confondus ou non :

- 1)  $\frac{3\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$
- 2)  $\frac{2\pi}{7}$  et  $\frac{23\pi}{7}$

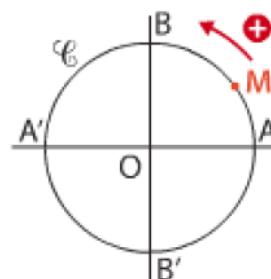
### 5 (Simplification)

Pour chacun des réels suivants, trouver un réel compris dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$  qui a la même image sur le cercle trigonométrique

- |                      |                       |                         |
|----------------------|-----------------------|-------------------------|
| a. $\frac{72\pi}{3}$ | b. $\frac{58\pi}{4}$  | c. $\frac{100\pi}{11}$  |
| d. $-\frac{\pi}{6}$  | e. $-\frac{20\pi}{6}$ | f. $-\frac{150\pi}{36}$ |

### 6 (Placement de points sur le cercle)

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, on a placé le point  $M$  associé à un réel  $x$ .



Placer les points  $N, P$  et  $Q$  associés respectivement aux réels  $x + \pi, -x$  et  $\pi - x$

### 7 (Conversion)

Compléter le tableau de conversion ci-dessous

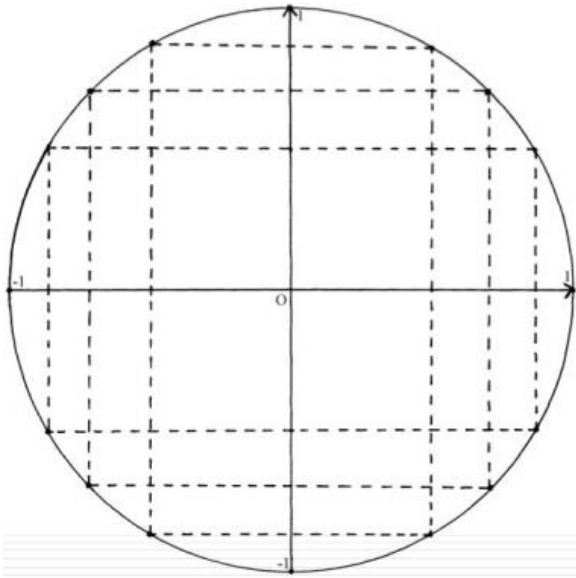
Radian	$\pi$					1	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
Degré		$20^\circ$	$60^\circ$	$65^\circ$	$1^\circ$					



## Cosinus et Sinus

### 8 (Lecture cosinus/sinus sur le cercle)

Donner les valeurs exactes des cosinus et sinus après avoir placé sur le cercle trigonométrique le réel correspondant



$$\cos(2\pi) = \quad \sin \pi = \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \quad \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \quad \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$$

### 9 (Equations)

A l'aide d'un cercle trigonométrique résoudre dans  $] -\pi; \pi[$  les équations suivantes :

a.  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$    b.  $\sin x = 0$    c.  $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$

### 10 (Inéquations)

A l'aide d'un cercle trigonométrique résoudre dans  $] -\pi; \pi[$  les inéquations suivantes

a.  $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$    b.  $\sin x < -\frac{1}{2}$    c.  $2 \cos x - \sqrt{2} \leq 0$

### 11 (Signe)

A l'aide d'un cercle trigonométrique déterminer le signe de  $\cos x$  et de  $\sin x$  dans les cas suivants :

a.  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$    b.  $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$    c.  $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$

### 12 ( $\sin \frac{\pi}{12}$ )

On sait que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

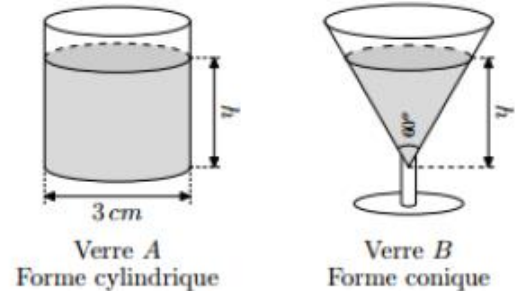
1) Vérifier que  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2) Déduisez-en  $\sin \frac{11\pi}{12}$

## Problèmes

### 13 (Verres doseurs)

On dispose de deux verres doseurs que l'on remplit tous les deux jusqu'à ce que l'eau atteigne une hauteur de  $h$  cm dans chacun des verres.



Formule :

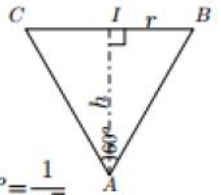
Cylindre de rayon $r$ et de hauteur $h$	Cône de révolution de rayon $r$ et de hauteur $h$
$V = \pi \times r^2 \times h$	$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$

1) Déterminer le volume  $V_A$  de l'eau présent dans le verre A en fonction de la hauteur  $h$ .

2) Le dessin ci-contre représente une coupe verticale du verre B.

On rappelle les rapports de l'angle remarquable  $30^\circ$  :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad ; \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

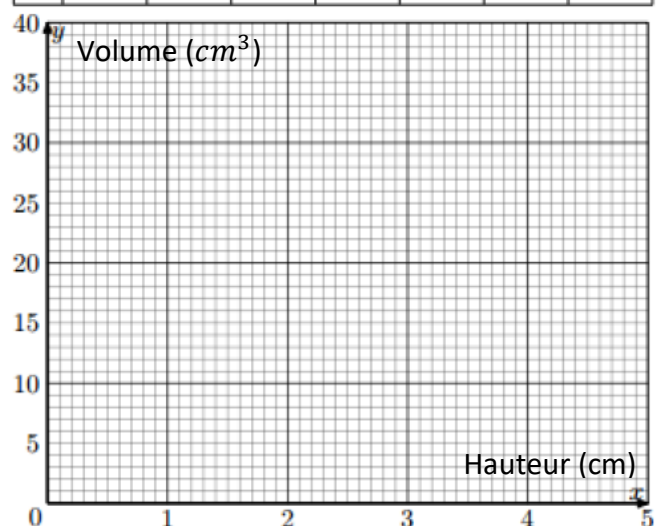


a. Exprimer le rayon  $r$  du disque formé par la surface de l'eau en fonction de la hauteur  $h$ .

b. En déduire que  $V_B = \frac{\pi}{9} h^3$

3) Compléter le tableau de valeurs puis tracer les courbes  $C_A$  et  $C_B$  des fonctions  $V_A$  et  $V_B$ .

$h$	0	1	2	3	4	4,5	5
$V_A$							
$V_B$							



4) a. Pour quelle hauteur d'eau les deux récipients contiennent le même volume ?

b. Quel est ce volume ?

