

## Chapitre 3 : Variables aléatoires

### Activité 1 (Révision probabilité) :

Dans un jeu de 52 cartes on pioche une carte au hasard. On considère les événements suivants :

$A$  : « Piocher un coeur »,  $B$  : « Piocher une figure »,  $C$  : « Piocher un trèfle entre 3 et 10 ».

- 1) a. Justifier qu'il s'agit bien d'une **expérience aléatoire**.  
b. Quel est l'**univers** associé à cette expérience aléatoire ?  
c. Donner une **issue** possible.  
d. Est-t-on dans une situation **d'équiprobabilité** ?
- 2) a. Ecrire les **événements**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sous forme d'ensemble.  
b. Calculer la **probabilité** de chacun des événements  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .  
c. Lequel est le plus probable ?
- 3) a. Calculer la probabilité de **ne pas** piocher de figure  
b. Calculer la probabilité de piocher un cœur **et** une figure  
c. Calculer la probabilité de piocher un cœur **ou** une figure
- 4) a. Justifier le fait que les événements  $A$  et  $C$  sont **incompatibles**.  
b. Formuler à l'aide d'une phrase l'évènement  $A \cup C$ .  
c. Quelle est la probabilité des événements  $A \cap C$  et  $A \cup C$  ?

### Activité 2 (Vers la notion de variable aléatoire) :

On considère une urne qui contient une boule jaune, une boule rouge et une boule noire.

On pioche successivement et **avec remise** deux boules dans l'urne.

- 1) a. A l'aide d'un **arbre** représenter cette expérience aléatoire.  
b. Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
- 2) Une boule jaune rapporte 1 pt. Une boule rouge rapporte 3 pts. Une boule noire rapporte 6 pts.  
On note  $X$  le nombre de points obtenus après les deux tirages.
  - a. Pour chacune des issues déterminer le nombre de points obtenus
  - b. Quelles sont les valeurs possibles pour  $X$  ?

*On dit que  $X$  est une **variable aléatoire** : C'est un nombre qui dépend du hasard.  $X$  est une variable numérique dont la valeur dépend de l'issue de l'expérience aléatoire.*

- 3) a. On considère l'évènement « Le joueur gagne 6 pts ». Cet évènement est noté «  $X = 6$  »  
Déterminer les issues correspondant à cet évènement puis calculer sa probabilité.  
b. Même question avec les événements «  $X \leq 4$  » et «  $X > 6$  ».



### Activité 3 : (Machine à sous)

Une machine à sous fonctionne de la manière suivante : On insère une pièce de 1€ dans la machine, le rouleau de la machine tourne et on obtient une combinaison d'images de fruits.

La machine est réglée de la manière suivante : On obtient 3 fruits identiques dans 5% des cas, 2 fruits identiques dans 20% des cas, et 3 fruits différents sinon.



On gagne 20€ lorsque l'on obtient 3 fruits identiques, 2€ lorsque l'on obtient 2 fruits identiques et sinon on perd notre mise.

On note  $X$  le gain du joueur sur une partie.

- 1) Justifier que  $X$  est une variable aléatoire
- 2) a. Compléter le tableau suivant :

<b>Gains</b>			
<b>Probabilités</b>			

Ce tableau représente ce qu'on appelle **la loi de probabilité** de  $X$ . Il précise avec quelle probabilité la variable prend telle valeur.

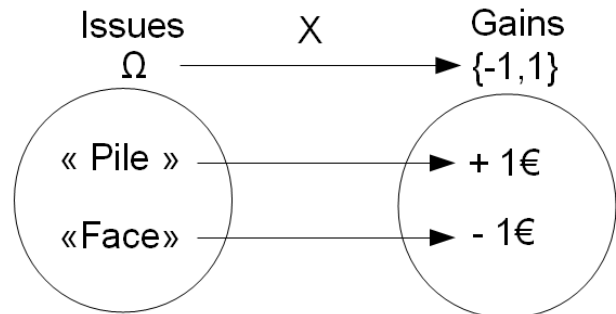
- b. Que se passe t-il si l'on effectue la somme des probabilités du tableau ?
- 3) Nous allons maintenant simuler cette expérience aléatoire.
  - a. A l'aide de l'instruction conditionnelle *Si ... Alors ... Sinon ...* et de l'instruction `ALEA()` qui renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1, écrire un algorithme permettant de simuler cette expérience aléatoire.
  - b. Modifier cet algorithme pour qu'il simule 10 000 fois cette expérience.
  - c. On a simulé 10000 fois cette expérience à l'aide d'un tableur.  
Expliquer les formules inscrites dans les cellules B2 et C2.
- 4) Dans la plage de cellule  $E2 : I4$  on calcule le nombre et la fréquence des parties où le joueur perd 1€, gagne 1€ ou gagne 19€. Comparer les fréquences obtenues avec les probabilités théoriques.
- 5) On souhaite maintenant savoir combien gagne t-on en moyenne par partie.
  - a. A l'aide de la simulation et des fonctions du tableur estimer le gain moyen du joueur par partie. *Ce nombre est appelé **espérance** de la variable  $X$  et noté  $E(X)$ . C'est la valeur moyenne de  $X$  lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois. Il correspond à ce que le joueur peut « espérer » gagner par partie.*
  - b. Retrouver par le calcul le gain moyen du joueur.

## 1 – La notion de variable aléatoire

**Définition 1** : Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire**  $X$  est une fonction qui à chaque issue  $w$  de  $\Omega$  associe un unique nombre réel.

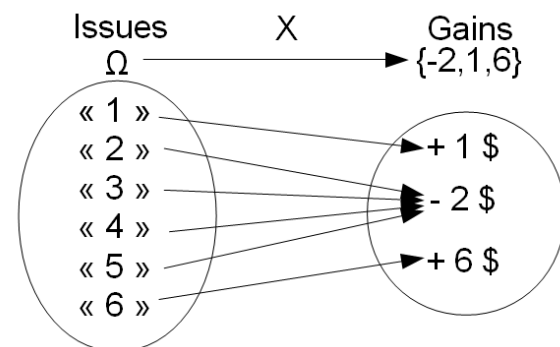
**Exemple 1** : On considère le jeu suivant : On lance une pièce. Si la pièce tombe sur « *Pile* » alors on gagne 1 €, si la pièce tombe sur « *Face* » on perd 1 €. Représenter cette situation à l'aide d'une variable aléatoire.

- L'univers est  $\Omega = \{Pile ; Face\}$ .
- Soit  $X$  le gain du joueur.  
Les valeurs possibles pour  $X$  sont  $-1$  et  $1$ .
- On a  $X(Pile) = 1$  et  $X(Face) = -1$



**Exemple 2** : On considère le jeu suivant : On lance un dé. Si le dé tombe sur « 1 » alors on gagne 1 \$, si le dé tombe sur « 6 » on gagne 6 \$, sinon on perd 2 \$. Représenter cette situation à l'aide d'une variable aléatoire.

- L'univers est  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
- Soit  $X$  le gain du joueur.  
Les valeurs possibles pour  $X$  sont  $-1, 1$  et  $6$
- On a  $X(1) = 1, X(6) = 6$   
et  $X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = -2$



**Définition 2** : Soit  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$  rangés dans l'ordre **croissant**.

- On note  $X = x_i$  l'événement composé des issues qui mènent au réel  $x_i$
- On note  $X \leq x_i$  (resp.  $X \geq x_i$ ) l'événement composé des issues qui mènent à un réel inférieur à  $x_i$  (resp. supérieur à  $x_i$ )

**Exemple 1 (Suite)** :

- «  $X = 1$  » correspond à l'évènement « *Pile* » et «  $X = -1$  » à l'évènement « *Face* ».
- Si la pièce est bien équilibré on a :  $P(X = 1) = P(X = -1) = 0,5$ .

**Exemple 2 (Suite)** :

- L'évènement «  $X = -2$  » correspond à l'évènement  $\{2, 3, 4, 5\}$ .
- L'évènement «  $X \geq 0$  » correspond à l'évènement  $\{1, 6\}$



## 2 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

**Définition 3** : On appelle **loi de probabilité** de la variable aléatoire  $X$ , la donnée de toutes les probabilités  $P(X = x_i)$  où  $x_i$  prend toutes les valeurs de  $E$ .

**Remarque** : On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

**Exemple 1** : Si la pièce est bien équilibré la loi de  $X$  est donnée par le tableau suivant :

$x_i$	-1	1
$P(X = x_i)$	0,5	0,5

**Exemple 2** : Si le dé est bien équilibré la loi de " $X$ " est donnée par le tableau suivant :

$x_i$	-2	1	6
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

**Propriété 1** : On a  $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$  ou bien  $p_1 + \dots + p_n = 1$ .

## 3 – Espérance d'une variable aléatoire

**Définition 4** : On appelle **espérance** de la variable aléatoire  $X$  le nombre, noté  $E(X)$ , donné par :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

**Remarque** : L'espérance  $E(X)$  peut s'interpréter comme la **valeur moyenne** prise par la variable  $X$  lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

**Exemple 1** (Suite) :

On a  $E(X) = (-1) \times 0,5 + 1 \times 0,5 = -0,5 + 0,5 = 0$ . Cela signifie qu'en moyenne le joueur ne gagnera ni ne perdra d'argent. On dira que le jeu est **équitable**.

**Exemple 2** (Suite) :

On a  $E(X) = (-2) \times \frac{4}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \approx -0,16$ . Cela signifie, qu'en moyenne le joueur perdra 0,16€ par partie.

**Remarque** : Dans la majorité des jeux de hasard de la vie réelle, (la roulette, le loto, les tickets à gratter, etc) l'espérance du joueur est négatif : Ce que l'on perd en moyenne correspond à ce que gagne l'organisateur du jeu.



# Variables aléatoires – Exercices

## La notion de variable aléatoire

**1** Dans un sac, on place sept cartons sur lesquels sont inscrits les mots suivants :

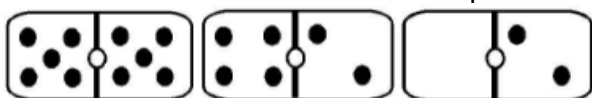
« BONJOUR » ; « LA » ; « ET » ; « MATH » ;  
« OUI » ; « HASARD » ; « ALEATOIRE »

On tire un carton au hasard. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de voyelles du mot tiré.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour  $X$  ?
- 2) Décrire l'évènement  $X = 1$ , puis calculer sa probabilité.
- 3) Représenter la variable aléatoire  $X$
- 4) Définir une autre variable aléatoire  $Y$  à partir de cette expérience aléatoire.

## **2** (Dominos)

Dans un jeu de dominos, chaque domino est partagé en deux parties portant chacun un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Tous les numéros sont différents. Par exemple :



- 1) Combien y'a-t-il de dominos dans le jeu ?

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de points présents sur les dominos.

- 2) Quelles sont les valeurs possibles pour  $X$  ?
- 3) Citer toutes les issues correspondant aux évènements suivants, puis calculer leur probabilité :
  - a.  $X = 5$
  - b.  $X \leq 2$
  - c.  $X > 10$
  - d.  $X \in [1,3]$
- 4) Quelle est la valeur de  $X$  la plus probable ?

**3** Une urne contient quatre boules sur lesquelles sont inscrites les entiers relatifs

$-1$  ;  $+2$  ;  $-3$  ;  $+4$

On tire simultanément deux boules de l'urne.

- 1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale à la somme des deux entiers inscrits sur les boules.

- 2) Quels sont les valeurs possibles pour  $X$  ?
- 3) Calculer la probabilité des évènements suivants :
  - a.  $X > 0$
  - b.  $X = 0$
  - c.  $X \leq 0$

## Loi de Probabilité, Espérance

**4** On lance deux dés bien équilibrés.

- 1) Déterminer l'univers associé à cette expérience aléatoire.
- 2) Soit  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre obtenu en faisant la somme des nombres sur les deux dés.
  - a. Quels sont les valeurs possibles pour  $X$  ?
  - b. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- 3) On vous propose les deux jeux suivants :
  - Jeu n°1 : « Vous lancez une paire de dés. Vous gagnez 1€ sauf si vous tombez sur le chiffre 7 où vous perdez 7€ ».
  - Jeu n°2 : « Vous lancez une paire de dés. Si vous obtenez un double alors vous gagnez en euros la somme des chiffres inscrits sur les 2 dés. sinon, vous perdez 1€.Quel jeu choisissez vous ?

**5** On propose le jeu suivant : Un joueur mise 3€ puis tire un ticket dans une urne qui contient :

- 5% de tickets portant la mention « 15€ »
  - 10% de tickets portant la mention « 10€ »
  - 20% de tickets portant la mention « 5€ »
- Le joueur récupère le montant indiqué sur le ticket. On note  $X$  le gain du joueur.
- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour  $X$  ?
  - 2) Déterminer la loi de  $X$ .
  - 3) Le jeu est-il équitable ?

## **6** (Le jeu du chapeau)

Dans une foire, un forain propose le jeu suivant : « Déposez une pièce de 1€ dans mon chapeau de paille, puis choisissez en une au hasard ». Son chapeau contient 10 pièces de 2€, 14 pièces de 1€, 9 pièces de 0,50€, 8 pièces de 0,20€, et 11 pièces de 0,10€.

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le gain du joueur après une partie.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour  $X$  ?
- 2) Calculer la loi de  $X$  ?
- 3) Ecrire à l'aide de la variable  $X$  les évènements suivants, puis calculer leur probabilité :
  - A : « Gagner de l'argent »
  - B : « Perdre de l'argent »
  - C : « Gagner 0,50€ »
- 4) Calculer l'espérance de  $X$  et donner une interprétation du résultat.



**7** Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre d'incidents répertoriés par mois dans une centrale nucléaire. La loi de  $X$  est donnée par :

$x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.91	0.06	0.02	$p$

- Déterminer la valeur de  $p$
- Quelle est la probabilité qu'il y'ait au moins un incident par mois.
- Quel est le nombre d'incident moyen par mois.

**8** Déterminer la loi de la variable  $X$  sachant que :

- Les valeurs de  $X$  sont les chiffres impairs
- $P(X = 1) = P(X = 3) = P(X = 5)$
- $P(X = 7) = 2 P(X = 1)$
- $P(X = 9) = 3 P(X = 1)$

**9** Le tableau suivant représente la loi d'une variable  $X$

$x_i$	-1	0	$a$
$P(X = x_i)$	0.5	$p$	0.1

Trouver les valeurs de  $a$  et  $p$  sachant que  $E(X) = 0$ .

**10** Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule. Les trente cases blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes. Les règles sont les suivantes :

- Case rouge : le joueur gagne 8 euros.
- Case verte : le joueur gagne 5 euros.
- Case jaune : le joueur ne gagne rien.
- Case blanche : le joueur perd  $a$  euros.

On note  $X$  le gain du joueur

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Calculer  $a$  pour que le jeu soit équitable.
- Quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ?

**11 (Fraude)**

Une compagnie de métro vend son ticket 1,70€. Le prix de l'amende pour fraude est de  $P$  €. Une étude interne a montré que la probabilité de contrôle sur l'ensemble du réseau est de 4 %. Lors d'un trajet, le fraudeur a deux possibilités : Soit il y a un contrôle et il paye l'amende, soit il n'y a pas de contrôle et il gagne le prix du ticket qu'il aurait dû payer. Quel est le prix de l'amende à partir duquel la fraude n'est pas rentable ?

**12 (Banco)**

Banco est un jeu de grattage de la Française des Jeux. C'est le plus ancien jeu de la Française des Jeux : il est apparu le 30 mai 1990 et était vendu 5 F. Depuis le passage à l'euro, le ticket est vendu 1 €. Pour 1 500 000 tickets, les lots sont résumés dans le tableau suivant :

Nombre de lots	Montant des lots
2	2 000 €
100	100 €
750	21 €
8 000	11 €
45 000	6 €
94 000	3 €
60 000	2 €
155 500	1 €

Dans tout l'exercice on note  $X$  la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

1) Ecrire à l'aide de la variable  $X$  les événements suivants, puis calculer leur probabilité :

- A : « Gagner le gros lot »
- B : « Gagner un lot »
- C : « Perdre sa mise »
- D : « Récupérer sa mise »
- E : « Gagner de l'argent »

2) Déterminer la loi de  $X$ .

3) Calculer l'espérance de  $X$ . Interpréter le résultat obtenu.

4) Quel est le bénéfice réalisée par la française des jeux sur un tirage de 1 500 000 tickets ?

