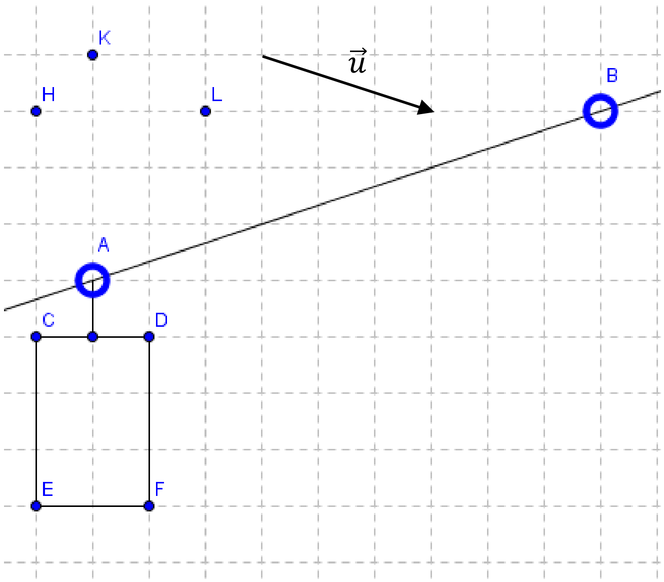
Vecteurs - Activités

Activité 1 (La télécabine) : Une télécabine se déplace le long d'un câble de A vers B.



1) a. Dessiner ci – dessus la télécabine $C'D'E'F'$ lorsqu'elle sera arrivée au terminus B.

   b. Comment appelle-t-on le déplacement de la télécabine ?

2) a. Représenter à l'aide d'une flèche le déplacement de la télécabine. Cette flèche est noté $\overrightarrow{AB}$.

   b. Trois oiseaux représentés par les points H,K et L se déplacent en suivant la flèche, noté $\vec{u}$, ci-contre. Déterminer les images H',K' et L' de H,K et L par la translation suivant cette flèche.

3) a. Que dire des flèches $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{FF'}$?

   b. Trouver une flèche égale à $\vec{u}$.

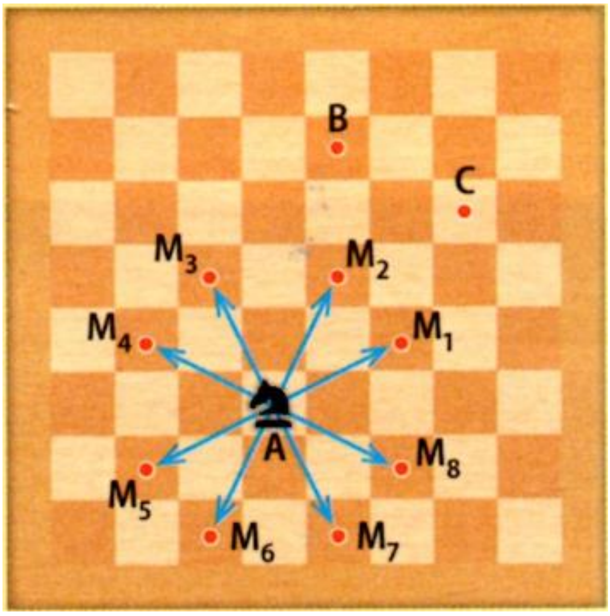
   c. Quelle est la nature des quadrilatères $ABC'C$, $ABD'D$, $ABE'E$ et $ABF'F$?

4) En utilisant les mots suivants, décrire le déplacement :

   a. De la télécabine : • Déplacement horizontal = • Déplacement vertical =

   b. Des trois oiseaux : • Déplacement horizontal = • Déplacement vertical =

Activité 2 (Le cavalier) : Aux échecs, le cavalier peut se déplacer selon les vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$, … , $\overrightarrow{AM_8}$.



1) a. Le cavalier effectue le déplacement $\overrightarrow{AM_1}$, puis le déplacement $\overrightarrow{AM_2}$. Où se trouve le cavalier après son déplacement ? Ce déplacement est noté $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$

   b. Quelle est la nature du quadrilatère AM_1CM_2 ?

   c. Compléter de 2 façons l'égalité : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots C}$

   d. Lire les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$.

   Que remarque-t-on ?

2) a. Le cavalier effectue le déplacement $\overrightarrow{AM_1}$ Quel déplacement doit-il effectuer pour retourner en A ? Ce déplacement est noté $-\overrightarrow{AM_1}$.

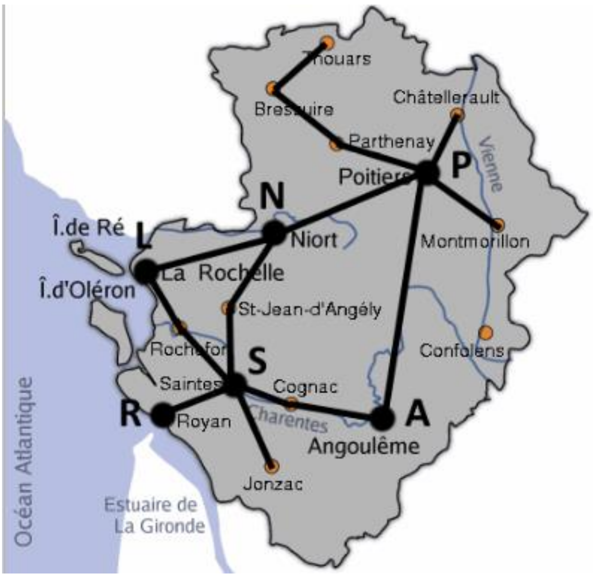
   b. Comparer les coordonnées de $\overrightarrow{AM_1}$ et de $\overrightarrow{AM_5}$

3) On note $\vec{u} - \vec{v}$ le déplacement $\vec{u} + (-\vec{v})$. Réaliser les déplacements suivants :

   a. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM_3} + \overrightarrow{AM_4}$ b. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM_5} - \overrightarrow{AM_7}$ c. $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_8} - \overrightarrow{AM_1}$ d. $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM_4}$

4) Déterminer toutes les façons permettant d'amener le cavalier en B en trois coups.

Activité 3 (Réseau TER) : Voici le plan du réseau TER de la région Poitou-Charentes



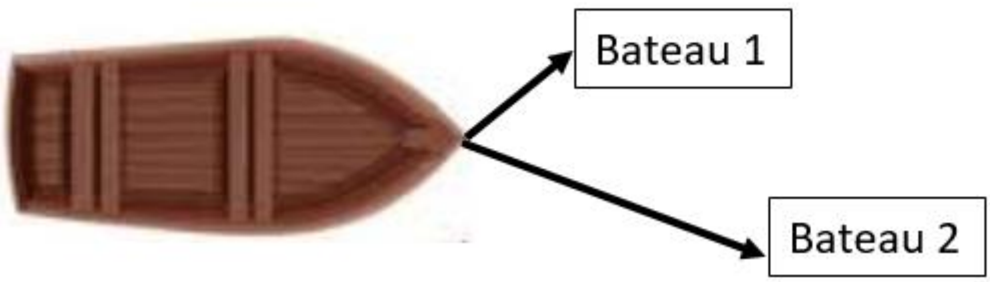
Un déplacement entre deux villes peut être représenté par un vecteur.

Exemple : $\overrightarrow{PA}$ représente le trajet Poitiers > Angoulême. On peut enchaîner deux trajets en utilisant la somme vectorielle.

1) Quels sont les deux correspondances possibles pour aller de Poitiers à Saintes ?
2) Donner toutes les trajets possibles pour aller de Royan à Poitiers (sans passer deux fois par la même ville)

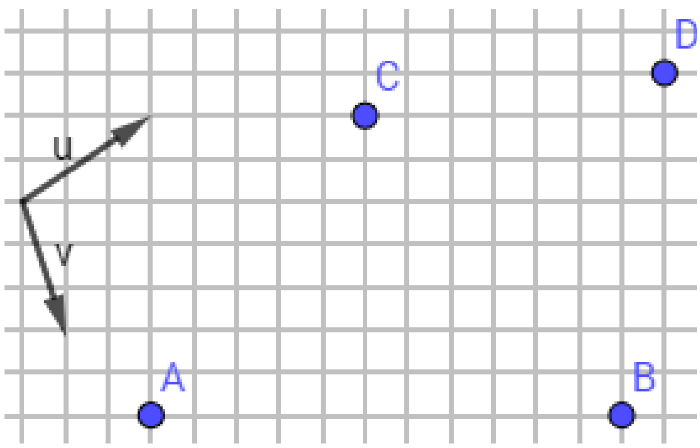
Activité 4 : Remorquage d'un bateau

Un bateau à la dérive, est remorqué par deux remorqueurs dont la force de traction a été représenté par deux vecteurs. Dans quelle direction ira le bateau ?



Activité 5 : Parcours

1) En utilisant uniquement les déplacements $\vec{u}$ et $\vec{v}$ trouver un chemin permettant d'aller de :
   a. A vers B
   b. B vers C
   c. C vers D
2) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3) Comparer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ avec celles du vecteur $\vec{u}$.

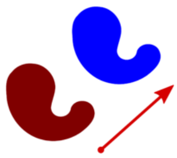


Chapitre 12 : Vecteurs

1 – La notion de vecteur

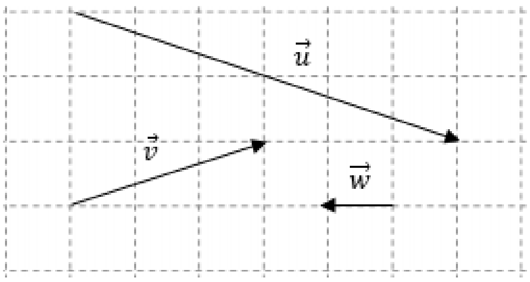
a. Définition

Introduction : La **translation** d'une figure, est un glissement, sans rotation, retournement, ni déformation de cette figure. Pour décrire le déplacement lié à une translation nous allons introduire un nouvel objet mathématique.



Définition 1 : Un vecteur est un objet mathématique qui se représente par une **flèche.** Il est caractérisé par : Une **direction**, un **sens** et une **longueur**.

Exemple 1 : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$



Exemple 2 : Le vecteur **d'origine** A et **d'extrémité** B, noté $\overrightarrow{AB}$.

- Direction : La droite (AB)
- Sens : De A vers B.
- Longueur : La distance AB

On appelle **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$, la translation qui transforme A en B

Exemple 3 : Le **vecteur nul** noté $\vec{0}$, qui ne possède ni sens, ni direction et qui est de longueur nulle.

Il correspond à la translation sans déplacement, qui transforme chaque point en lui-même.

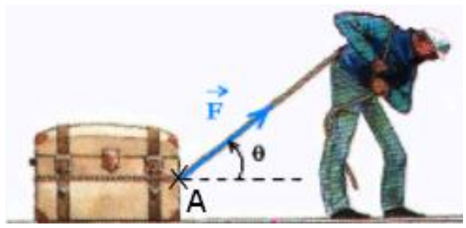
Application (Vecteur Force) : Les vecteurs sont utilisés aussi en Physique pour représenter la notion de **force.**

Direction : Orientation de la force

Sens : Vers où la force agit

Intensité : Grandeur de la force (mesurée en Newton).

Point d'application : Endroit où la force s'exerce

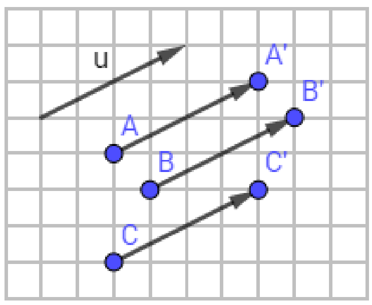


b. Egalité de deux vecteurs

Définition 2 : Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

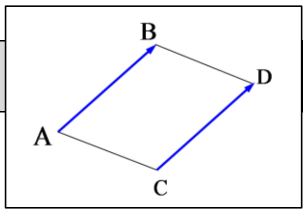
Exemple 4 :

- Tous les vecteurs ci-contre sont égaux : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$
- On dit que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est le **représentant** du vecteur $\vec{u}$ d'origine A.
- On dit que le vecteur $\overrightarrow{BA'}$ est le **représentant** du vecteur $\vec{u}$ d'extrémité B'.
- Un vecteur possède une infinité de représentants.



Remarque : On a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots = \vec{0}$

Propriété 1 : On $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si AB***DC*** est un parallélogramme.



Exemple 5 : Dans l'exemple 4, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.

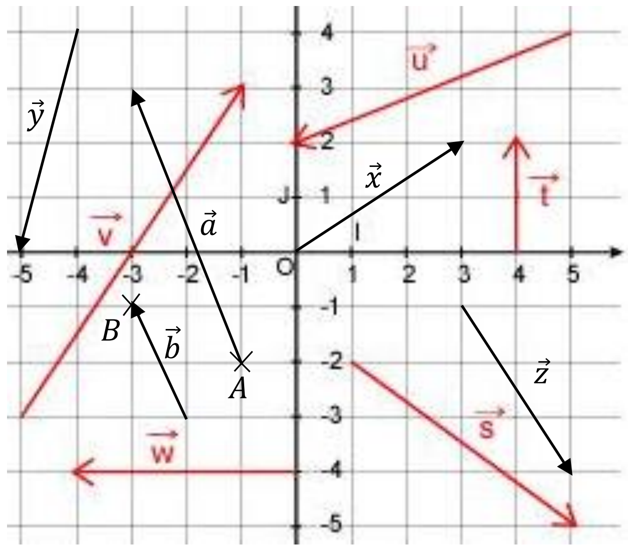
2 – Coordonnées d'un vecteur

Définition 3 : Chaque vecteur $\vec{u}$ possède un couple de **coordonnées** $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où :

$$x \rightarrow \textit{Déplacement horizontal} \text{ et } y \rightarrow \textit{Déplacement vertical}$$

Exemple 5 :

1) Lire les coordonnées des vecteurs :
   - $\vec{u}\binom{-4}{-2}$
   - $\vec{v}\binom{4}{6}$
   - $\vec{w}\binom{-4}{0}$
   - $\vec{s}\binom{4}{-3}$
   - $\vec{t}\binom{0}{2}$



2) Quels sont les coordonnées du vecteur nul ? $\vec{0}\binom{0}{0}$,

3) a. Représenter les vecteurs $\vec{x}\binom{3}{2}$, $\vec{y}\binom{-1}{4}$ et $\vec{z}\binom{2}{-3}$.

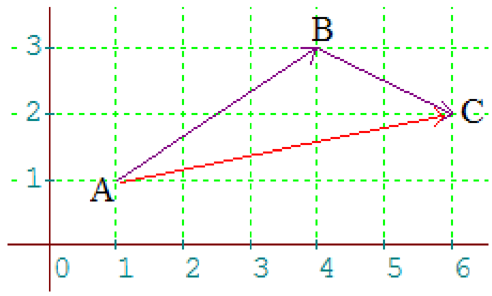
   b. Tracer le représentant d'origine A du vecteur $\vec{a}\binom{-2}{5}$.

   c. Tracer le représentant d'extrémité B du vecteur $\vec{b}\binom{-1}{2}$

Propriété 2 : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple 6 : On a $A(1;1)$; $B(4;3)$ et $C(6;2)$. Calculer les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2}$
- $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \binom{6-1}{2-1} = \binom{5}{1}$
- $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \binom{6-4}{2-3} = \binom{2}{-1}$

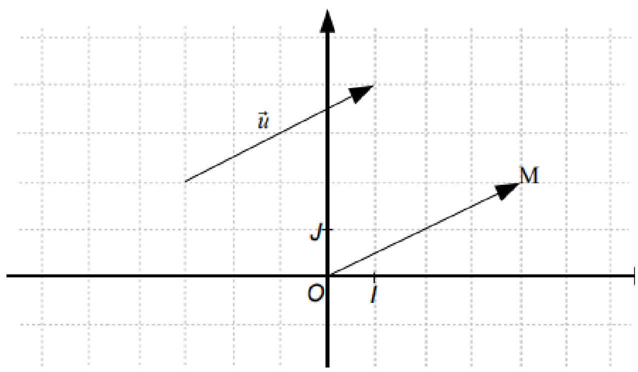


Propriété 3 : Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement si ils possèdent les mêmes coordonnées.

Propriété 4 : Dans un repère (O, I, J), les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont égales aux coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Exemple 7 :

Sur la figure le vecteur $\vec{u}\binom{4}{2}$ a les mêmes coordonnées que le point $M(4,2)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$



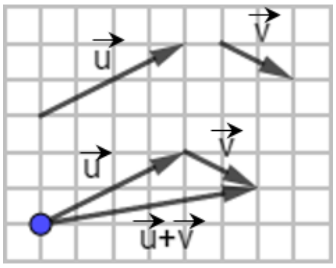
3 – Somme de deux vecteurs & Vecteur opposé

a. Définitions

Définition 4 : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

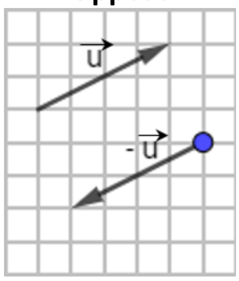
- La **somme** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}+\vec{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue en enchainant la translation de vecteur $\vec{u}$, puis celle de vecteur $\vec{v}$.
- **L'opposé** de $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur qui a même direction, même longueur que $\vec{u}$ mais un sens différent.
- **La différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est le vecteur $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

Somme



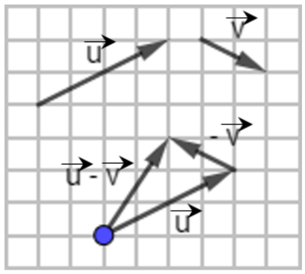
On met les vecteurs « bout à bout ».

Opposé



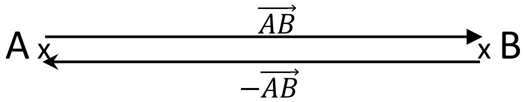
On inverse le sens de la flèche.

Différence



On fait la somme de $\vec{u}$ et de $-\vec{v}$

Remarque : On a $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.



Propriété 5 : On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On a les propriétés suivantes :

(1) **Associativité** : $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

(2) **Commutativité** : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(3) **Elément neutre** : $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{0}$

(4) **Symétrique** : $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

b. Coordonnées

Propriété 6 : On considère deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$

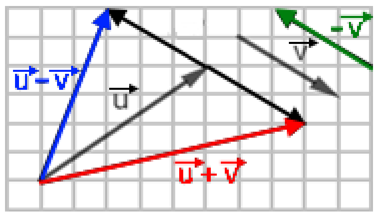
- $\vec{u}+\vec{v}\binom{x+x'}{y+y'}$
- $-\vec{u}\binom{-x}{-y}$
- $\vec{u}-\vec{v}\binom{x-x'}{y-y'}$

Exemple 8 : Soient $\vec{u}\binom{5}{5}$et $\vec{v}\binom{3}{-2}$ deux vecteurs.

1) Calculer les coordonnées de :

- $\vec{u}+\vec{v}=\binom{5+3}{4-2}=\binom{8}{2}$
- $-\vec{v}=\binom{-3}{-(-2)}=\binom{-3}{2}$
- $\vec{u}-\vec{v}=\binom{5-3}{4-(-2)}=\binom{2}{6}$

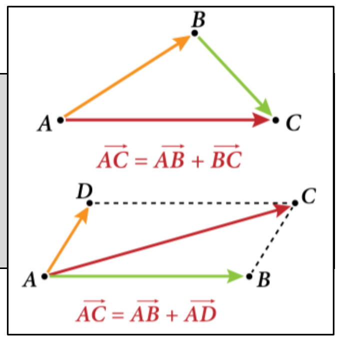
2) Représenter ces trois vecteurs et vérifier graphiquement ces résultats



c. Propriétés géométriques de la somme

Propriété 7 : Pour tous points A, B, C et D du plan, on a :

- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
- **Règle du parallélogramme** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.



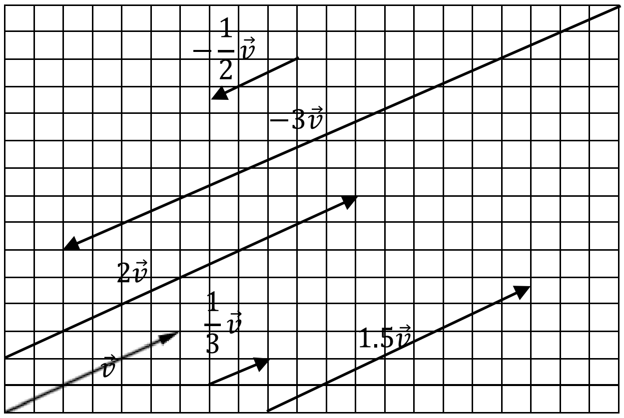
Exemple 9 : A l'aide de la relation de Chasles, simplifier les expressions suivantes :

- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{KT}+\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{KP}$
- $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{EZ}+\overrightarrow{ET}=\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{ZE}+\overrightarrow{ET}=\overrightarrow{AT}$

4 – Multiplication d'un vecteur par un nombre

Définition 5 : Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ un vecteur et soit k un nombre réel alors $k.\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\binom{kx}{ky}$.

Exemple 10 : On considère le vecteur $\vec{v}\binom{6}{3}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants puis représenter-les à l'aide du quadrillage ci-contre :



- $2\,\vec{v} = \binom{2\times 6}{2\times 3} = \binom{12}{6}$
- $\frac{1}{3}\vec{v} = \binom{1/3\times 6}{1/3\times 3} = \binom{2}{1}$
- $-3\,\vec{v} = \binom{-3\times 6}{-3\times 3} = \binom{-18}{9}$
- $-\frac{1}{2}\,\vec{v} = \binom{-0.5\times 6}{-0.5\times 3} = \binom{-3}{-1.5}$
- $1,5\,\vec{v} = \binom{1.5\times 6}{1.5\times 3} = \binom{9}{4.5}$
- $0\,\vec{v} = \binom{0\times 6}{0\times 3} = \binom{0}{0} = \vec{0}$

Remarque : Tous ces vecteurs ont même directions.

Propriété 8 : On considère deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et k et k' deux nombres réels. On a les propriétés suivantes :

(1) $0.\vec{u} = \vec{0}$

(2) $k.\vec{0} = \vec{0}$

(3) $k.(\vec{u}+\vec{v}) = k.\vec{u} + k.\vec{v}$

(4) $(k+k').\vec{u} = k.\vec{u} + k'.\vec{u}$

(5) $k.(k'.\vec{u}) = (k.k').\vec{u}$

5 – Vecteurs colinéaires

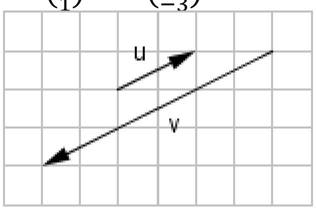
Définition 6 : Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Propriété 9 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre k tel que :

$$\vec{v} = k \times \vec{u}$$

Exemple 11 : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

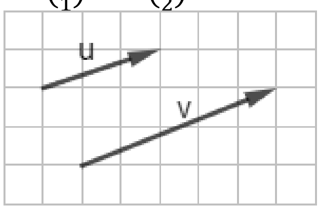
- $\vec{u}\binom{2}{1}$ et $\vec{v}\binom{-6}{-3}$



$\vec{v}\binom{-6}{-3} = \binom{-3\times 2}{-3\times 1} = -3.\vec{u}\binom{2}{1}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

- $\vec{u}\binom{3}{1}$ et $\vec{v}\binom{5}{2}$



$2 = 2\times 1$ et $2\times 3 = 6 \neq 5$

Il n'y a donc pas de nombre k tel que $\vec{v} = k\times\vec{u}$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Propriété 10 : Deux vecteurs $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{c}{d}$ sont colinéaires si et seulement $ad - bc = 0$.

Exemple 12 : Représenter les vecteurs suivants puis déterminer s'ils sont colinéaires ou non.

- $\vec{u}\binom{4}{6}$ et $\vec{v}\binom{6}{9}$

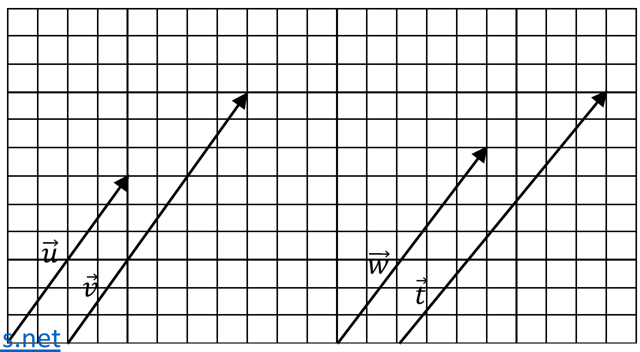
  $4\times 9 - 6\times 6 = 36 - 36 = 0$

  Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

- $\vec{w}\binom{5}{7}$ et $\vec{t}\binom{7}{9}$

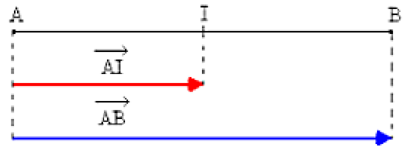
  $5\times 9 - 7\times 7 = 45 - 47 = -2 \neq 0$

  Donc $\vec{w}$ et $\vec{t}$ ne sont pas colinéaires

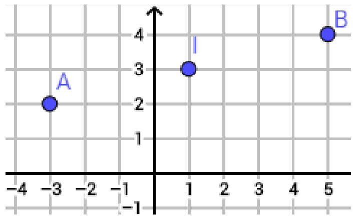


6 – Application à la géométrie plane

Propriété 11 : I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$.



Exemple 13 : On considère les points $A(-3; 2)$, $B(5; 4)$. Montrer que $I(1; 3)$ est le milieu du segment $[AB]$



$\overrightarrow{AB} = \binom{8}{2}$; $\overrightarrow{AI} = \binom{4}{1}$ et $\overrightarrow{IB} = \binom{4}{1}$.

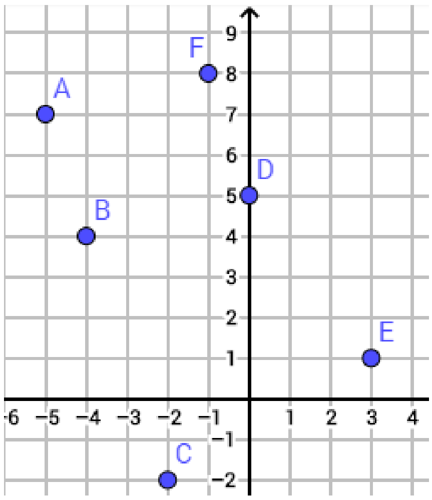
On a donc bien $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Donc I est le milieu du segment $[AB]$

Propriété 12 : Application de la colinéarité

- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple 14 : On considère les points $A(-5; 7)$, $B(-4; 4)$ et $C(-2; -2)$



1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{-4-(-5)}{4-7} = \binom{1}{-3}$

$\overrightarrow{AC} = \binom{x_C - x_A}{y_C - y_A} = \binom{-2-(-5)}{-2-7} = \binom{3}{-9}$

$\overrightarrow{AC} = \binom{3}{-9} = \binom{3\times 1}{3\times(-3)} = 3\overrightarrow{AB}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires

Donc les points A, B et C sont alignés.

2) On considère les points $D(0; 5)$ et $E(3; 1)$.

Les droites (AD) et (BE) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{AD} = \binom{x_D - x_A}{y_D - y_A} = \binom{0-(-5)}{5-7} = \binom{5}{2}$

$\overrightarrow{BE} = \binom{x_E - x_B}{y_E - y_B} = \binom{3-(-4)}{1-4} = \binom{7}{3}$

$5 \times 3 - 2 \times 7 = 15 - 14 = 1 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les droites (AD) et (BE) ne sont pas parallèles.

3) Déterminer les coordonnées du point F, tel que $ABDF$ soit un parallélogramme.

$ABDF$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BD}$

$\binom{x_F - x_A}{y_F - y_A} = \binom{x_D - x_B}{y_D - y_B} \Leftrightarrow \binom{x_F-(-5)}{y_F - 7} = \binom{0-(-4)}{5-4} = \binom{4}{1}$

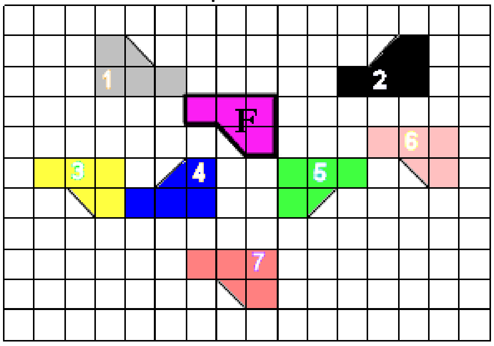
Donc $x_F + 5 = 4$ d'où $x_F = 4 - 5 = -1$ et $y_F - 7 = 1$ d'où $y_F = 1 + 7 = 8$. Finalement, $F(-1; 8)$

Vecteurs - Exercices

Vecteurs & Translation

1 (Translation 1)

Quelles sont les figures qui peuvent être obtenues à partir de la figure F par translation. Représenter alors le vecteur correspondant.

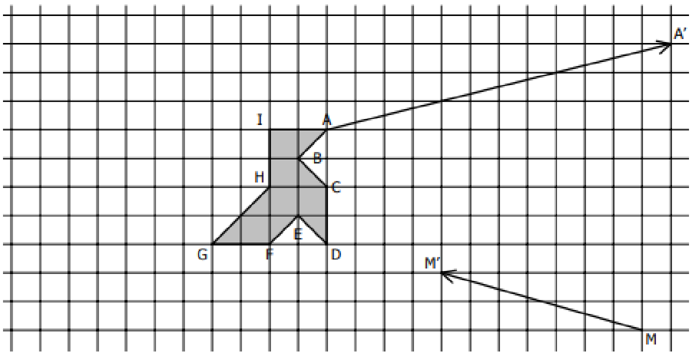


2 (Translation 2)

Dessiner l'image de la figure ci-dessus par :

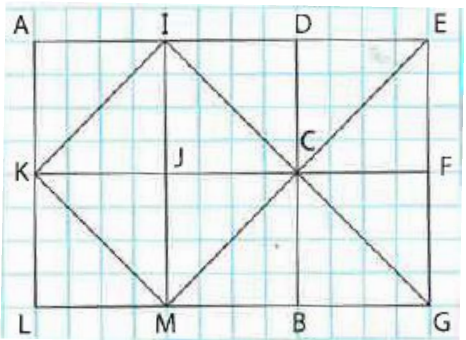
a. La translation qui transforme A en A'

b. La translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$



2 (Translation 3)

Compléter le tableau suivant avec les points de la figure :

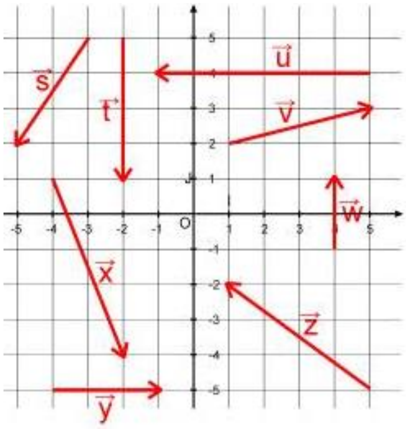


La translation de vecteur	transforme	en
$\overrightarrow{CE}$	L	
$\overrightarrow{DA}$		M
	ECG	IKM
	[FJ]	[CK]

Notion de Vecteur, Coordonnées

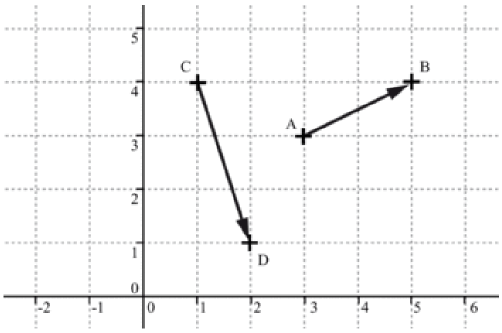
4 (Coordonnées – Lecture graphique)

Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs représentés ci-dessous.



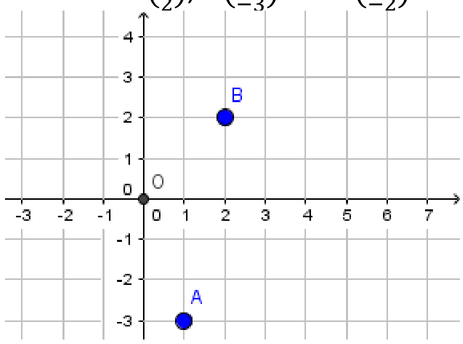
5 (Coordonnées – Calcul)

On considère les points $A(3;5)$, $B(5;4)$, $C(1;4)$ et $D(2;1)$. Donner la direction, le sens et la longueur des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ puis calculer leurs coordonnées.



6 (Représentants 1)

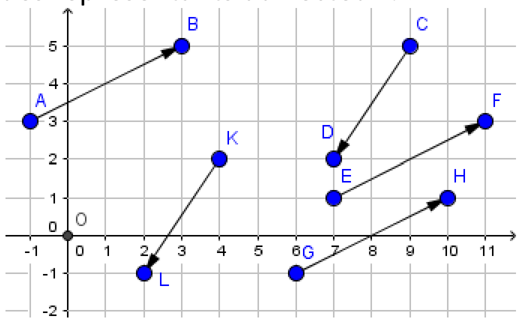
Soit les vecteurs $\vec{u}\binom{5}{2}$, $\vec{v}\binom{1}{-3}$ et $\vec{w}\binom{-3}{-2}$



1) Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.
2) a. Tracer le représentant d'origine B du vecteur $\vec{v}$.
   b. Donner un autre représentant du vecteur $\vec{v}$.
3) Représenter le vecteur $\vec{w}$ en choisissant comme origine le point O du repère.
4) a. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
   b. Quel est la nature du quadrilatère $ABDC$?

7 (Représentants 2)

Soit les vecteurs $\vec{u}\binom{4}{2}$, $\vec{v}\binom{-2}{-3}$. On a tracé ci-dessous, plusieurs vecteurs. Déterminer ceux qui sont des représentants du vecteur $\vec{u}$ et ceux qui sont des représentants du vecteur $\vec{v}$.



8 (Calcul mental)

Calculer de tête les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

a. $A(1;2)$ et $B(4{,}1)$ b. $A(-5;1)$ et $B(6,-2)$

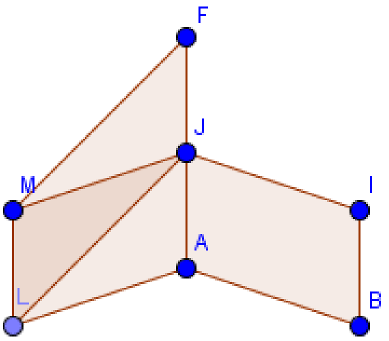
c. $A(10;-5)$ et $B(10{,}0)$ d. $A(-6;1)$ et $B(6{,}1)$

9 (Algorithme)

Ecrire un algorithme qui lit les coordonnées de deux points A et B et qui renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

10 (Parallélogramme 1)

Dans la figure ci-dessous, $ABIJ$, $AJML$ et $LJFM$ sont des parallélogrammes.



1) a. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AJ}$?
   b. En déduire que le quadrilatère $BIML$ est un parallélogramme.
2) a. Montrer que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JF}$
   b. En déduire l'existence d'un quatrième parallélogramme sur la figure.

11 (Parallélogramme 2)

Dans un repère (O, I, J), on considère les points $A(1;2)$, $B(5;4)$, $C(2;1)$, $D(-2;-1)$.

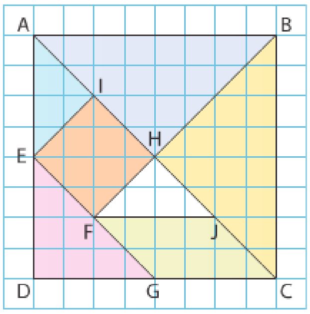
1) Faire une figure.
2) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
3) Placer le point $E(6;2)$. Déterminer les coordonnées du point F tel que $CBEF$ soit un parallélogramme.
4) Que dire du quadrilatère $ADEF$? Justifier.

Somme de deux vecteurs

12 (Tangram)

Le Tangram est un jeu chinois qui est composé de différentes pièces :

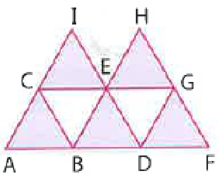
- Un carré
- Un parallélogramme
- Des triangles rectangles isocèles de différentes tailles.



1) En utilisant uniquement les points de la figure, écrire sous forme d'un seul vecteur les sommes suivantes. Justifier :
   a. $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{FG}$ b. $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{EF}$
   c. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{HF}$ d. $\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{JC}$
2) Donner sans justifier un représentant des vecteurs suivants
   a. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{JF}$ b. $\overrightarrow{FJ} - \overrightarrow{IE}$
   c. $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF}$ d. $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BH}$
3) Lire les coordonnées des vecteurs
   $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FJ}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$; $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FJ}$
4) Placer les points
   a. K tel que $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{DE}$
   b. L tel que $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{EI}$
   c. M tel que $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{HF}$

13 (Pavage)

Cette figure est constituée d'un assemblage de triangle équilatéraux. Compléter chacune des égalités suivantes en utilisant un des points de la figure.



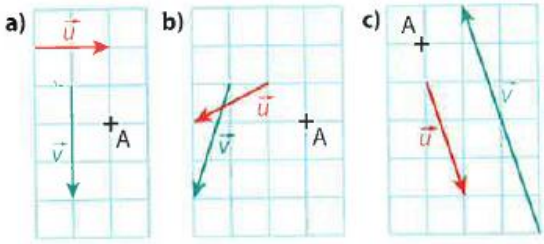
a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{A\ldots}$
b. $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{E\ldots}$
c. $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{A\ldots}$
d. $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{G\ldots}$
e. $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{\ldots I} = \vec{0}$
f. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{\ldots G} = \overrightarrow{CH}$

14 (Segment)

1) Placer les points E, F et G tel que
   a. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$
   b. $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{EG} = \vec{0}$
   c. $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DE}$
2) Compléter par le point qui convient
   a. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{\ldots A}$
   b. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

15 **(Représenter la somme 1)**

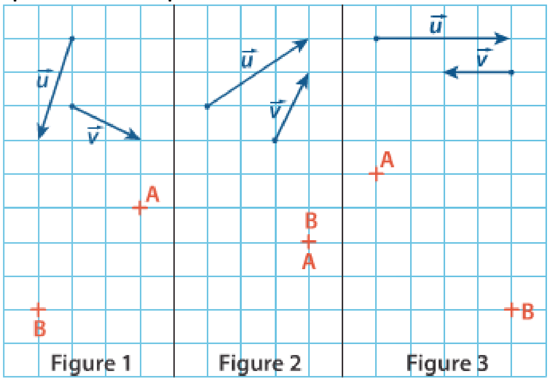
Dans chacun des cas, reproduire la figure puis construire le représentant d'origine A des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$



16 **(Représenter la somme 2)**

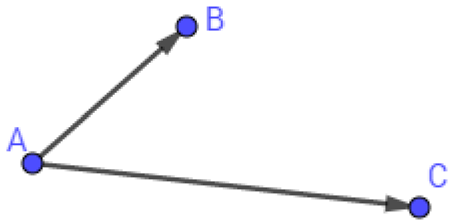
Dans chacun des cas, reproduire la figure sur un quadrillage puis construire

- Le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}+\vec{v}$
- Le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \vec{u}-\vec{v}$
- Le point E tel que $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$



17 **(Représenter la somme 3)**

Construire le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



18 **(Représenter la somme 4)**

Soit ABC un triangle

1) Placer les points M et N tel que
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
2) Placer les points P et Q tel que
$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

19 **(Représenter la somme 5)**

Construire un carré $ABCD$ de centre O et de côté $4\,cm$, puis à l'aide du compas, construire le représentant du vecteur :

a. $\vec{u} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$ d'origine A

b. $\vec{v} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CO}$ d'origine D

c. $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO}$ d'origine C

20 **(Relation de Chasles 1)**

A l'aide de la relation de Chasles, Simplifier les écritures des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

a. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

b. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

c. $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$

21 **(Relation de Chasles 2)**

Simplifier les écritures suivantes :

a. $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{RC}$

b. $\overrightarrow{OW} + \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{XL}$

c. $\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{RF}$

d. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}$

22 **(Dans un triangle)**

ABC est un triangle et M un point quelconque intérieur au triangle.

1) Placer les points D, E et F tel que
   a. $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$
   b. $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$
   c. $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$
2) Démontrer que :
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

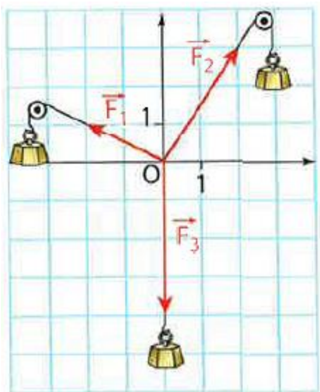
23 **(Coordonnées – Calcul mental)**

Dans un repère, on considère les vecteurs suivants
$$\overrightarrow{AB}\binom{1}{3},\ \overrightarrow{CD}\binom{-2}{4} \text{ et } \overrightarrow{EF}\binom{0}{10}$$

1) Calculer mentalement les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BA}$.
2) Que peut-on en déduire sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

24 **(Système à l'équilibre)**

En physique une force est représentée par un vecteur. Le système est équilibré lorsque la somme des forces qui s'exercent sur ce système est égale au vecteur nul $\vec{0}$.



1) Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$.

2) Calculer $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$.

3) Que peut-on en déduire pour ce système ?

25 **(Calcul de coordonnées)**

Dans un repère du plan, on condidère les points $A(1;3)$, $B(0;4)$ et $C(5;0)$. Déterminer par le calcul les coordonnées des points :

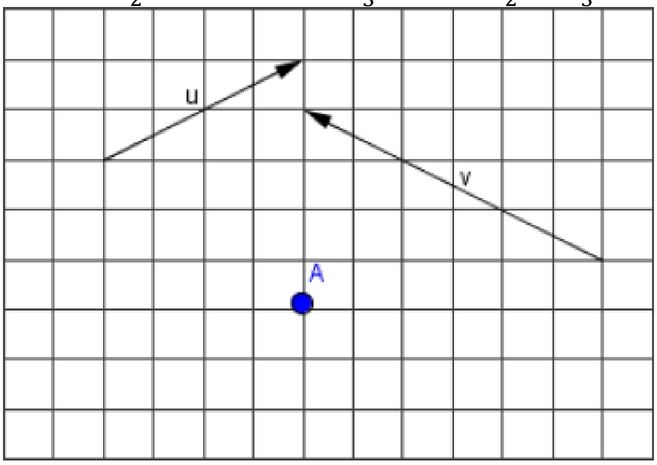
1) H tel que $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AC}$
2) M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
3) D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Produit d'un vecteur par un nombre

26 (Représenter k.$\vec{u}$)

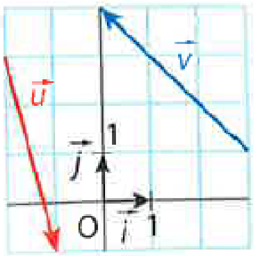
Placer les points M, N et P tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}\ ;\ \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$$



27 (Coordonnées)

Déterminer les coordonnées des vecteurs :



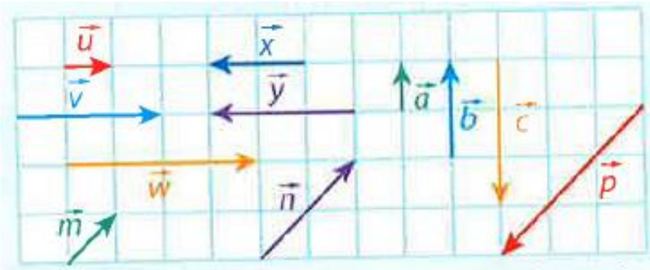
a) $\vec{u}$ b) $\vec{v}$

c) $3\vec{u}$ d) $-2\vec{v}$

e) $-\frac{1}{5}\vec{u}$ f) $3\vec{u}-2\vec{v}$

28 (Lecture graphique)

Dans chacun des cas, compléter les égalités suivantes en utilisant un nombre réel.



a) $\vec{v} = \cdots \vec{u}$ b) $\vec{y} = \cdots \vec{x}$ c) $\vec{b} = \cdots \vec{a}$

d) $\vec{n} = \cdots \vec{m}$ e) $\vec{u} = \cdots \vec{w}$ f) $\vec{u} = \cdots \vec{y}$

g) $\vec{b} = \cdots \vec{c}$ h) $\vec{m} = \cdots \vec{p}$ i) $\vec{w} = \cdots \vec{v}$

j) $\vec{y} = \cdots \vec{w}$ k) $\vec{c} = \cdots \vec{b}$ l) $\vec{n} = \cdots \vec{p}$

29 (Droite graduée)

Sur une droite graduée, on a placé les points A, B, C, D et E. Dans chacun des cas trouver le nombre réel k tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$

a. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$

b. $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{BE}$

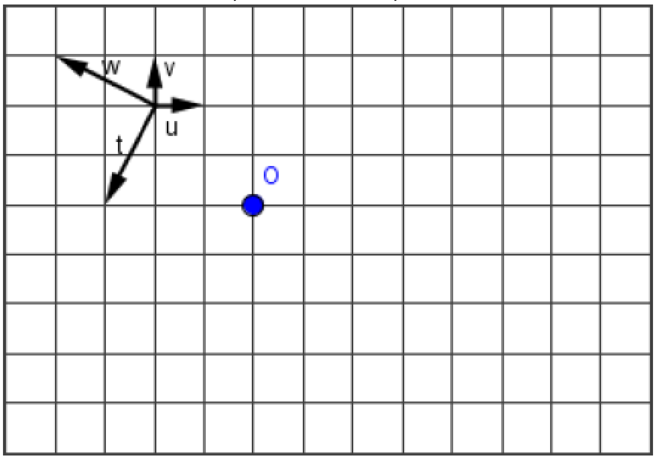
c. $\vec{v} = \overrightarrow{EC}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

d. $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$

30 (Circuit)

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont représentés sur la figure ci-dessous. A partir du point O, on définit un « circuit » par les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB} = -2\vec{w}\ ;\ \overrightarrow{BC} = -4\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{CD} = -2\vec{v}\ ;$$
$$\overrightarrow{DE} = 2\vec{w}\ ;\ \overrightarrow{EF} = -2\vec{t}\ ;\ \overrightarrow{FG} = -3\vec{w}$$



1) Placer les points A, B, C, D, E, F et G.
2) Exprimer les vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{w}$ en fonction des vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3) a. Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   b. Vérifier graphiquement votre résultat

31 (Réduire)

Dans chaque cas, réduire l'expression suivante :

a) $2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CA}$

b) $5\overrightarrow{EF}-3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF})+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EF})$

c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$

d) $3\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}+3\overrightarrow{FA}$

32 (Segment 1)

1) Tracer un segment $[AB]$ de longueur 6 cm
2) Placer les points C, D, E tel que :
   $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
3) Trouver les nombres x, y et z tel que
   $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BE} = y\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD} = z\overrightarrow{BE}$

33 (Segment 2)

Soit $[AB]$ un segment de longueur 10 cm.

On considère le point D tel que : $\overrightarrow{DA} + 4\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$
2) Construire le point D

34 (Dans un repère)

Soient les points $A(4; 2)$, $B(-2; 1)$, $C(-3; 5)$ ainsi que le point $M(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure
2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AM}$
3) En déduire par le calcul les coordonnées de M

Vecteurs colinéaires

35 (Vecteurs colinéaires 1)

Dans chacun des cas suivants, déterminer mentalement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non.

a) $2\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$.

b) $-3\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{v}$.

c) $\vec{u}(4;-2)$ et $\vec{v}\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

d) $\vec{u}(5;1)$ et $\vec{v}(9;2)$.

36 (Vecteurs colinéaires 2)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

a) $4\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

c) $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}=7\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AC}$

37 (Algorithme)

1) Compléter l'algorithme suivant :

<u>Variables</u> :

x_A, x_B, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D : type nombre.

a, b, c, d : type nombre.

<u>Initialisations</u> :

Saisir x_A, x_B, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D

<u>Traitement</u> :

Affecter à a la valeur $x_B - x_A$.

Affecter à b la valeur $y_B - y_A$.

Affecter à c la valeur $x_D - x_C$.

Affecter à d la valeur $y_D - y_C$.

Si $a \times d = b \times c$ **alors**

  Afficher ....

  sinon

  Afficher ....

Fin Si

2) Exécuter l'algorithme avec les points

a. $A(-1;1)$, $B(2;5)$, $C(1;4)$ et $D(-5;-4)$

b. $A(-2;0)$, $B(0;5)$, $C(3;7)$ et $D(-2;3)$

38 (Point quelconque)

On considère les points $A(2;3)$ et $B(4;1)$.

Soit $M(x;y)$ un point quelconque.

A quelle condition, portant sur x et y, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils colinéaires ?

Application géométriques

39 (Points alignés)

Soit DEF un triangle.

Soit P tel que $\overrightarrow{DP}=-3\overrightarrow{EF}$

Soit Q tel que $\overrightarrow{DQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$

Montrer que les points D, P et Q sont alignés.

40 (Points alignés 2)

Soit $IJKL$ un parallélogramme.

Soit M tel que $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IJ}$

Soit N tel que $\overrightarrow{LN}=2\overrightarrow{JK}-5\overrightarrow{IJ}$

1) a. Montrer que $\overrightarrow{KM}=3\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{JK}$

b. Montrer que $\overrightarrow{KN}=-6\overrightarrow{IJ}+2\overrightarrow{JK}$

2) Démontrer que K, M et N sont alignés

41 (Droites parallèles)

Soit ABC un triangle.

Soit M tel que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Soit N tel que $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$

Montrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

42 (Dans un repère)

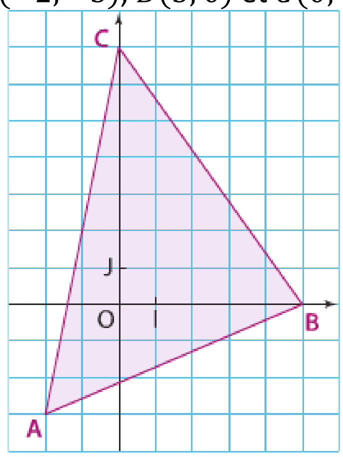
Soit ABC un triangle.

1) Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.
2) Déterminer les coordonnées de B, C et D dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
3) Démontrer que B, C et D sont alignés

43 (Centre de gravité)

On considère les points A, B et C tels que :

$A(-2;-3)$, $B(5;0)$ et $C(0;7)$



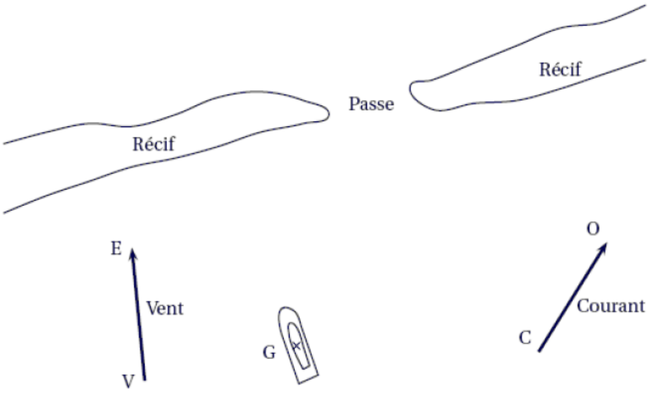
Soit G le centre de gravité du triangle ABC

1) Calculer les coordonnées du milieu K de $[BC]$
2) Quel est le nombre λ tel que $\overrightarrow{AG}=\lambda\,\overrightarrow{AK}$?
3) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AK}$ puis de $\overrightarrow{AG}$
4) En déduire les coordonnées du point G
5) Prouver que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Problèmes

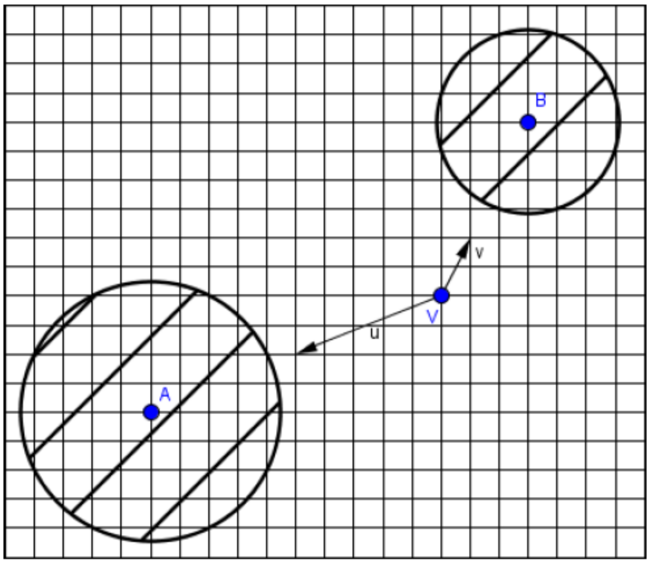
44 **(Bateau)**

L'embarcation est en panne. Va-t-elle s'échouer sur le récif ?



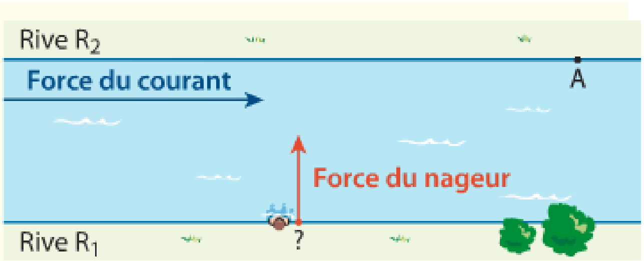
45 **(Dans l'espace)**

Un vaisseau spatial, à l'arrêt dans l'espace, est soumis aux forces d'attraction de deux astres A et B.Dans quelle direction doit-il déclencher son moteur pour rester immobile ?



46 **(Traversée)**

Un nageur se trouve sur la rive R_1 d'une rivière dont les berges sont parallèles. De quel endroit doit-il quitter cette rive pour atteindre la balise située en A sur la rive R_2 ?



47 **(Points alignés)**

Dans cette figure $ABCD$ est un carré et ABE et BCF sont des triangles équilatéraux.

Les points D, E et F sont ils-alignés ?